

Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

Moments d'inertie. Centre de masse de ce solide. Cylindre creux. Produit de la masse de la roue. Petite histoire. Moment cinétique. Cylindre plein. Point de contact. Temps de sœur d'inertie. Niveau du sang de masse. Longueur l . Produit de leur masse. Produit vectoriel de e_1 . Petite échelle. Aller.



[vers la recherche de séquences vidéo](#)

(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)



[vers la vidéo](#)

Center for Digital Education. Plus de matériel de soutien pédagogique ici :

<https://www.epfl.ch/education/educational-initiatives/cede/educational-technologies-gallery/boocs-en/>

Chapitre 13

Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

EPFL

Dr. Sylvain Bréchet

13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

1 / 49

...

notes

résumé

0m 0s



13.1 Moments d'inertie

- 13.1.1 Barre mince
- 13.1.2 Cylindre creux
- 13.1.3 Cylindre plein

13.2 Solide indéformable avec un axe fixe

- 13.2.1 Théorème de Huygens-Steiner
- 13.2.2 Energie cinétique d'un solide indéformable
- 13.2.3 Théorème de l'énergie cinétique
- 13.2.4 Roue mal équilibrée

13.3 Gyroscopie et effets gyroscopiques

- 13.3.1 Effets gyroscopiques
- 13.3.2 Roue de vélo
- 13.3.3 Toupie

Ces sous-titres ont été générés automatiquement ... Bonjour à toutes et à tous. On va aujourd'hui discuter d'un phénomène passionnant. Ce phénomène passionnant, c'est les gyroscopes. Mais avant d'arriver au gyroscope, on a encore un peu de travail théorique à faire. On va calculer des moments d'inertie. Ça, pour le coup, c'est un peu plus technique, c'est mathématique, c'est moins passionnant, mais on est obligé aussi de passer par là. D'accord ? Mais la dernière heure sera incroyable en termes d'effets physiques. Bon.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

0m 1s



- **Continuum de matière** : on considère que les points matériels P_α du solide sont suffisamment proches les uns des autres pour former un continuum.

- **Modèle du continuum** : limite du continu

somme discrète : $\rightarrow$: intégrale

- **Moment d'inertie** : $I_{G,i}$ par rapport à l'axe principal d'inertie Ge_i

(13.1)

- m_α = masse du point matériel P_α
- dm = masse de l'élément de volume infinitésimal dV
- $r_{\alpha,i}$ = distance du point matériel P_α à l'axe Ge_i
- r = distance de l'élément de volume infinitésimal à l'axe Ge_i
- V = volume du solide indéformable

La semaine passée, on a déterminé les équations de l'air qui décrivaient le mouvement de rotation propre d'un solide indéformable autour d'axe qui passe par le centre de masse de ce solide. D'accord ? Ce qu'on a vu dans le cas général, c'est que le moment cinétique est une application linéaire du vecteur vitesse et angulaire. D'accord ? Cette application linéaire, c'est le tenseur d'inertie. Et si on se place dans une base, un repère dont les axes sont orientés, ce sont les axes de symétrie de l'objet, eh bien ce tenseur d'inertie est diagonale, et les valeurs propres, les termes sur la diagonale, sont les moments d'inertie. On a établi une expression générale pour ces moments d'inertie. On va les calculer ensemble, maintenant. Enfin, on va les calculer pour certains solides très réguliers. On prendra le cas d'une barmine, d'un cylindre creux et d'un cylindre plein. D'accord ? On va également établir le théorème de Steiner, dont vous avez déjà eu besoin en exercice la semaine passée, mais qu'on va établir de manière rigoureuse aujourd'hui. L'idée est la suivante. Imaginons, par exemple, qu'on ait le moment d'inertie de cette roue autour de son axe de symétrie. Maintenant, la roue, elle roule sans glisser sur une surface. On aimerait trouver le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'axe de symétrie de la roue qui passe par le point de contact. On verra que la formule est très simple. On va la démontrer ensemble. Le moment d'inertie au niveau du point de contact va être plus grand, puisque les points matériels seront plus éloignés que si on se retrouve au niveau du centre de masse. La différence, c'est un moment d'inertie. Ce moment d'inertie, c'est le produit de la masse de la roue. Il faut le carré de la distance qui sépare les points. Cette formule est tellement simple que vous la comprenez tout de

notes

résumé

0m 40s



- **Continuum de matière** : on considère que les points matériels P_α du solide sont suffisamment proches les uns des autres pour former un continuum.

- **Modèle du continuum** : limite du continu

somme discrète : $\rightarrow$: intégrale

- **Moment d'inertie** : $I_{G,i}$ par rapport à l'axe principal d'inertie Ge_i

(13.1)

- m_α = masse du point matériel P_α
- dm = masse de l'élément de volume infinitésimal dV
- $r_{\alpha,i}$ = distance du point matériel P_α à l'axe Ge_i
- r = distance de l'élément de volume infinitésimal à l'axe Ge_i
- V = volume du solide indéformable

suite. Vous n'avez même pas besoin de l'apprendre pour l'employer. Au cas où elle peut être utile en exercice voire à l'examen. D'accord ? Très souvent, d'ailleurs, elle est apparue à l'examen, ce qui ne garantit pas qu'elle soit à l'examen cette année, mais ce n'est pas impossible. Voilà. Pour la petite histoire, la première année que j'ai enseigné le cours de physique générale 1, j'avais dit aux étudiants que cette formule sera certainement à l'examen. Il y a 50 % des étudiants qui ont réussi à la faire faux. La deuxième année, j'ai raconté la même histoire en disant que l'année d'avant, j'avais dit aux étudiants de connaître cette formule et que 5 % n'avaient pas été capables de le faire. Cette année-là, j'ai eu 75 % de réponses correctes. D'accord ? On tente asymptotiquement vers 100 %. J'espère qu'avec des mathématiciens, on sera très proche de 100 %. D'accord ? Voilà. Elle n'est pas compliquée à s'en souvenir. D'accord ? Donc on va établir ce théorème du Geldsteiner. On va également s'intéresser à l'énergie cinétique d'un solide indéformable. D'accord ? Et on va revisiter le théorème de l'énergie cinétique pour le solide indéformable. On verra que son expression est finalement assez similaire de celle du point matériel. D'accord ? Et on traitera, si tant nous le permet, de la dynamique d'une roue mal équilibrée. C'est intéressant au niveau pratique lorsque vous devez changer vos roues sur votre voiture. D'accord ? Il faut évidemment que l'axe des roues soit l'axe principal d'inertie. Si ce n'est pas le cas, c'est comme les roues voilées de vélo. Ça cuine un peu, ça fait... D'accord ? Et puis ça bouge. Et surtout, il y a des moments de force qui sont induits. Et ces moments de force, on peut les calculer. On fera ceci ensemble. Mais la partie la plus intéressante sera la dernière. C'est les effets gyroscopiques. Qui d'entre vous roule

notes

résumé

- **Continuum de matière** : on considère que les points matériels P_α du solide sont suffisamment proches les uns des autres pour former un continuum.

- **Modèle du continuum** : limite du continu

somme discrète : $\rightarrow$: intégrale

- **Moment d'inertie** : $I_{G,i}$ par rapport à l'axe principal d'inertie Ge_i

(13.1)

- m_α = masse du point matériel P_α
- dm = masse de l'élément de volume infinitésimal dV
- $r_{\alpha,i}$ = distance du point matériel P_α à l'axe Ge_i
- r = distance de l'élément de volume infinitésimal à l'axe Ge_i
- V = volume du solide indéformable

régulièrement en vélo ? Levez la main. Ça représente quand même une bonne fraction d'entre vous. D'accord ? Quand vous roulez en vélo, il y a une chose qui est évidente. Si vous êtes arrêté, vous allez poser le pied par terre à gauche ou à droite, parce que le vélo, lorsqu'il est vertical, est instable. Il va soit tomber vers la gauche, soit vers la droite, dû au moment de force, lié au poids. C'est vraiment ce qui est intéressant. C'est que si maintenant vous roulez avec votre vélo à une certaine vitesse, disons 20, 30 kmh, voire plus si vous avez un vélo de course, d'accord ? Si vous avez un certain sens de l'équilibre, vous pouvez facilement relever les mains du guidon, d'accord ? Et puis, simplement, avec vos pieds, vous vous maintenez en équilibre. Essayez de faire ça à l'arrêt, ça va être nettement plus compliqué, d'accord ? Pourquoi ? Parce que justement, il y a un effet gyroscopique, un effet lié au roue de vélo en rotation, et le fait que ces roues tournent fait qu'il est très difficile de modifier l'axe de rotation. Elle résiste au changement de l'orientation de l'axe de rotation. C'est selon ce principe que fonctionnent les gyroscopes. On en parlera tout à l'heure. Quand on aura compris ceci, on pourra alors déterminer l'angle que prend un vélo, lorsque vous prenez un virage. Vous savez tous que si vous roulez une certaine vitesse en vélo, que va-t-il se passer naturellement le vélo s'incline vers l'intérieur du virage ? Et pourtant, il tombe pas. Si il roulait pas, le vélo est incliné comme ça, vers l'intérieur du virage, si les roues ne tombe pas, il est clair pour tout le monde que le moment de force fait plier le vélo et puis vous cassez la figure. Et pourtant, vous êtes stable sur le vélo. Pourquoi ? On va le comprendre. D'ailleurs, l'effet

notes

résumé

- **Continuum de matière** : on considère que les points matériels P_α du solide sont suffisamment proches les uns des autres pour former un continuum.

- **Modèle du continuum** : limite du continu

somme discrète : $\rightarrow$: intégrale

- **Moment d'inertie** : $I_{G,i}$ par rapport à l'axe principal d'inertie Ge_i

(13.1)

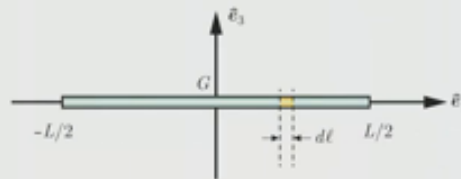
- m_α = masse du point matériel P_α
- dm = masse de l'élément de volume infinitésimal dV
- $r_{\alpha,i}$ = distance du point matériel P_α à l'axe Ge_i
- r = distance de l'élément de volume infinitésimal à l'axe Ge_i
- V = volume du solide indéformable

est encore plus important si vous prenez des motards dans un grand prix. Ils sont quasiment couchés avec leurs motos quand ils prennent certains virages. C'est-à-dire que leur genoux touche quasiment le sol. Et pourtant, ils sont stables. Pourquoi sont-ils stables ? Parce que leurs routes tournent très vite. Et c'est ce qu'on va comprendre aujourd'hui en faisant explicitement le calcul. Donc c'est un calcul, c'est complexe, mais qui est intéressant, puisqu'il y a une physique très riche qui se cache derrière. Bon, bref, avant de se lancer dans quelque chose de passionnant,

notes

résumé

- Barre mince : orientée selon l'axe Ge_1 en rotation autour de l'axe Ge_3
 - ① Masse : M
 - ② Longueur : L
 - ③ Epaisseur : e négligeable : $e \ll L$



- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

(13.2)

- Densité linéique : barre homogène

(13.3)

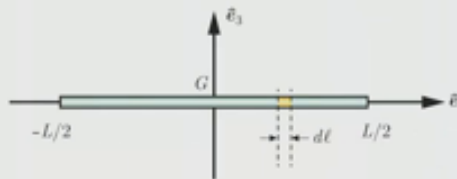
notes

résumé

6m 15s



- Barre mince : orientée selon l'axe Ge_1 en rotation autour de l'axe Ge_3
 - ① Masse : M
 - ② Longueur : L
 - ③ Epaisseur : e négligeable : $e \ll L$



- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

(13.2)

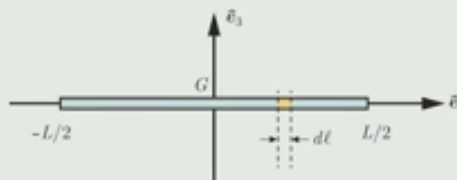
- Densité linéique : barre homogène

(13.3)

va associer une masse infinitésimale d'EM. Et puis, il va se trouver à une certaine distance, disons, une distance R , de l'axe principal d'inertie par rapport auquel on mesure le moment d'inertie. Donc, il faut encore multiplier par un R carré. D'accord ? Ce qu'on voudra faire ensemble, c'est calculer ces intégrales. Alors, comment est-ce qu'on va s'y prendre ? Eh bien, il va falloir lier, si vous voulez, le petit élément de masse infinitésimale aux dimensions de l'objet. D'accord ? Grâce notamment au fait que l'objet qu'on va considérer sera homogène, c'est-à-dire la répartition de la masse sera la même partout. Donc, on peut prendre n'importe quel petit élément de volume infinitésimal, ils auront tous la même masse infinitésimale d'EM. D'accord ? Alors, faisons ceci, maintenant, de manière spécifique pour quelques exemples.

notes

résumé



- Masse : élément de longueur infinitésimale $d\ell$

(13.4)

- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

(13.5)

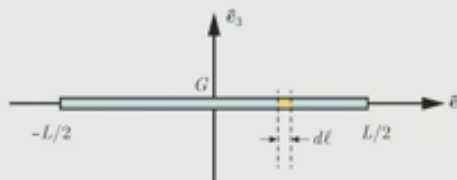
Le premier exemple qu'on va prendre, c'est une barre mince. D'accord ? Cette barre, elle a une masse grande M , elle a une longueur L , et puis, elle a une épaisseur E qui est négligeable. On peut imaginer une barre, qui est par exemple une barre cylindrique, d'accord ? Puis, on prend un rayon qui est très petit par rapport à la longueur de la barre. Donc, on peut négliger, si vous voulez, l'épaisseur de cette barre, ça, c'est important pour le calcul qui va suivre. D'accord ? Et puis, donc, on va faire tourner la barre autour d'un axe qui est orthogonal à la barre. Prenons ici l'axe vertical, par exemple, avec la barre qui est horizontale. Donc, elle va tourner dans un plan horizontal, comme ça. Et on va choisir un repère d'inertie de manière judicieuse qui va tourner avec la barre. On va prendre un premier vecteur unitaire, E_1 chapeau, qui est orienté ici, à un profil vers la droite, qui va tourner avec la barre, qui est toujours orienté le long de la barre. E_3 chapeau est vertical. Le produit vectoriel de E_1 avec E_2 chapeau, de E_3 chapeau, ce qui veut dire que, et je vais peut-être le noter sur le dessin, le vecteur E_2 chapeau rentre dans le plan, il est orienté vers l'arrière. D'accord ? Maintenant, on prend notre barre et on la décompose en petits morceaux. Parce que calcul une intégrale, c'est sommé des petits morceaux de saucisson. Ça, ça ressemble à un saucisson. D'accord ? On le sectionne. On a un petit élément de longueur infinitésimale d' E_1 , d'accord ? Qui apparaît ici en jaune orange, qui a une masse infinitésimale d' E_1 . Ce petit élément va contribuer au moment d'inertie par rapport à l'axe vertical et on va sommer les contributions de tous ces petits éléments de longueur infinitésimale de masse infinitésimale. C'est ça l'idée. Donc, concrètement, le moment d'inertie par rapport

notes

résumé

9m 6s





- Masse : élément de longueur infinitésimale $d\ell$

(13.4)

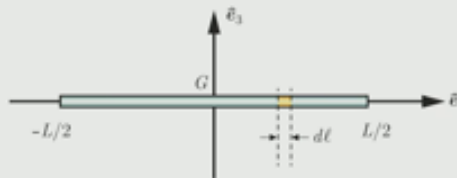
- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

(13.5)

à l'axe principal d'inertie d'axe vertical ce sera l'intégrale de la masse infinitésimale du petit élément d'angle infinitésimale dL , d'accord ? Multiplié par quoi ? Multiplié par la distance au carré, qui le sépare de l'axe vertical, qui est ici L^2 . D'accord ? Bon, et puis ces petits éléments, on va sommer leurs contributions au moment d'inertie de l'extrémité gauche, où peut-il être vos moins grandes sur 2, à l'extrémité droite, où ils vont vos grandes sur 2. Donc, nos bornes seront respectivement moins grandes sur 2 et elles sur 2. D'accord ? Alors, pour aller plus loin, il faut qu'on puisse exprimer DM en termes de L . On va tenir compte du fait que la barre est homogène. Comme pour la chaîne qu'on a vue en application de cours à la semaine 10, pour la poussée de la chaîne qui tombait dans le récipient, on va introduire une densité linéique de masse, qu'on va appeler ρ . C'est tout simplement le rapport de la masse infinitésimale du petit élément de longueur infinitésimale divisé par sa longueur infinitésimale. Comme la barre est homogène, ce qui est vrai localement et vrai globalement, on a la même densité linéique globale, c'est donc le rapport de la masse totale de la barre divisé par sa longueur totale, grand M sur grand L . On peut donc maintenant tirer de cette définition, en considérant ρ constant, on peut tirer de cette définition DM en fonction de L suffit de multiplier par DL . D'accord ?

notes

résumé



- Masse : élément de longueur infinitésimale $d\ell$

$$dm = \rho_L d\ell = \frac{M}{L} d\ell \quad (13.4)$$

- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

$$I_{G,3} = \int_{-L/2}^{L/2} dm \ell^2 = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \ell^2 d\ell \quad (13.5)$$

Donc, la masse infinitésimale d'un petit élément de longueur infinitésimale, ce sera le produit de la densité linéaire multipliée par la longueur infinitésimale. Cette densité linéaire, c'est le rapport de la masse totale sur la longueur totale multipliée par $d\ell$. Et voici, on a été capable de réexprimer dm en termes de $d\ell$. C'est ce qu'il faut toujours faire pour des moments d'inertie, c'est prendre un petit élément de masse infinitésimale et le réexprimer en termes des grandeurs géométriques qui apparaissent dans le calcul du moment. C'est ça la clé, en fait. D'accord ? Alors, si on prend maintenant le moment d'inertie autour de l'axe vertical, autour de cet axe principal d'inertie, c'est donc l'intégral de moins $L/2$ à $L/2$, de dm , fois L carré. D'accord ? Alors, on remplace dm par l'expression qu'on vient de calculer. Le rapport de la masse totale sur la longueur totale, c'est une constante, qu'on peut mettre en évidence devant l'intégral. On aura grand M sur grand L .

notes

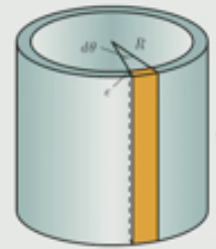
résumé

12m 16s



- **Cylindre creux** : en rotation autour de l'axe de symétrie vertical Ge_3

- Masse : M
- Hauteur : L
- Rayon : R
- Epaisseur : e négligeable : $e \ll R$



- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm R^2 \quad (13.6)$$

- Volume infinitésimal : longueur L , largeur $R d\theta$ et épaisseur e

$$dV = \quad (13.7)$$

- Densité volumique : cylindre creux homogène

(13.8)

On aura l'intégral de moins grand L sur à plus grand L sur 2, de petite L carré, fois petite L. D'accord ? Donc, la primitive, à une constante préviensure, la primitive de petite L carré, c'est évidemment un tiers de L au cube. D'accord ? Donc, on aura grand M sur grand L, fois L au cube sur 3, qu'on va donc évaluer entre moins grand L sur 2 et plus grand L sur 2. D'accord ? Alors, pour la bande supérieure, on va avoir grand M sur L, fois L au cube sur 24. D'accord ? Et pour la bande supérieure, on a le même résultat, mais avec un signe moins. Comme on retranche la bande supérieure, on aura deux fois une contribution en L, en M sur L, fois L au cube sur 24, soit en M sur L, fois L au cube sur 12. Le L au dénominateur se simplifie avec une puissance de L au numérateur. Et donc, on se retrouve au final, avec M sur L, L au cube sur 12, soit un douzième de ML carré. D'accord ? Donc, le moment d'inertie par rapport à cet axe de notre barre, donc l'axe orthogonal à la barre qui passe par le sang de masse, c'est un facteur numérique qui savait être un douzième qui multiplie la masse de la barre fois la longueur au carré. Si vous y réfléchissez, la barre, ce qu'on sait sur L, c'est quelle est le mass M, quelle est le longueur L. On doit construire un moment d'inertie qu'elle produit d'une masse fois la longueur au carré. Donc, ça doit être forcément un ML carré. Et il se trouve que, par le calcul, on voit que le coefficient qui est devant cet un douzième. Alors, si vous appliquez le théorème du Genssteiner, vous verrez que si vous calculez le moment d'inertie par rapport à l'extrémité de la barre, donc

notes

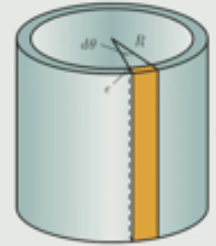
résumé

13m 8s



- **Cylindre creux** : en rotation autour de l'axe de symétrie vertical $G e_3$

- Masse : M
- Hauteur : L
- Rayon : R
- Epaisseur : e négligeable : $e \ll R$



- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie $G e_3$

$$I_{G,3} = \int_V dm R^2 \quad (13.6)$$

- Volume infinitésimal : longueur L , largeur $R d\theta$ et épaisseur e

$$dV = \quad (13.7)$$

- Densité volumique : cylindre creux homogène

(13.8)

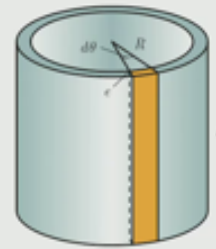
si au lieu de prendre l'axe au centre, vous le faites passer soit à gauche, soit à droite, eh bien, vous allez vous retrouver avec un tiers de ML^2 carré. D'accord ? Donc, le facteur numérique dépend vraiment de la géométrie. D'accord ? Voilà. Bon, alors, prenons maintenant le cas intéressant d'un cylindre cru. OK ? Donc, il faut imaginer un cylindre qui tourne autour de son axe de symétrie, qui est l'axe vertical. On veut déterminer le moment d'inertie par rapport à cet axe. D'accord ? Le cylindre, il a une masse M , il a une hauteur L , un rayon R . Et on suppose qu'il est cru et que l'épaisseur de ce cylindre cru est petite, ce qui veut dire que l'épaisseur E que vous voyez ici est négligeable par rapport au rayon R du cylindre. Toute la masse se trouve sur la circonférence du cylindre. C'est ça l'idée. D'accord ? Alors, on va devoir, lui aussi, le découper en morceaux pour calculer le moment d'inertie. Qu'est-ce qu'on va choisir comme morceaux ? Des morceaux qui ont une largeur infinitésimale. D'accord ? Par contre, qui vont avoir une hauteur qui est la hauteur du cylindre, et une épaisseur qui est celle du cylindre aussi. C'est les morceaux que vous voyez ici en orange. D'accord ? Alors, cette largeur infinitésimale, c'est quoi ? C'est la longueur d'arc qui est sous-tendue par un angle infinitésimal des tétras. Donc, c'est R fois des tétras. D'accord ? On va donc calculer la somme des moments d'inertie liés à toutes ces petites bandes qui ont une épaisseur négligeable avec lesquelles on tapisse l'ensemble du cylindre cru. C'est ça l'idée. D'accord ? Donc, le moment d'inertie autour de l'axe vertical qui passe par le centre de masse, ça va être ici l'intégrale sur le volume. Attention ! Quand je parle du volume, c'est le volume dans lequel se trouve la masse du cylindre. C'est pas

notes

résumé

- **Cylindre creux** : en rotation autour de l'axe de symétrie vertical Ge_3

- Masse : M
- Hauteur : L
- Rayon : R
- Epaisseur : e négligeable : $e \ll R$



- **Moment d'inertie** : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm R^2 \quad (13.6)$$

- **Volume infinitésimal** : longueur L , largeur $R d\theta$ et épaisseur e

$$dV = \quad (13.7)$$

- **Densité volumique** : cylindre creux homogène

(13.8)

le volume total qui est refermé par le cylindre cru. Donc, c'est que la partie externe, c'est la couronne de ce cylindre, si on veut bien. D'accord ? C'est la somme donc sur ce volume du produit des masses infinitésimales, des petites bandes de largeur infinitésimale, d'EM, multipliées par la distance au carré qui les sépare de l'axe de rotation, comme l'épaisseur est négligeable, peut considérer que c'est le rayon. C'est grand air carré. D'accord ? Qui d'ailleurs est constant. Bon. Alors, maintenant, calculons rapidement le volume infinitésimal d'un autre petit élément de masse infinitésimale, de notre petite bande verticale qui apparaît ici en orange. D'accord ? Quel est ce volume ? Bon. Alors, ça va être le produit de la hauteur, L , fois l'épaisseur,

notes

résumé

- Masse : élément de volume infinitésimal dV

(13.9)

- Moment d'inertie : autour de l'axe Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm R^2 \quad (13.6)$$

- Moment d'inertie : (13.9) dans (13.6)

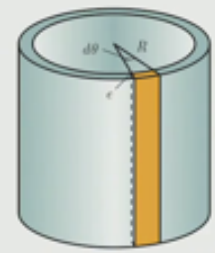
(13.10)

- Volume : cylindre creux

(13.11)

- Moment d'inertie : (13.11) dans (13.10)

(13.12)



E, fois la largeur, qui correspond ici, petit arc de cercle, sous tendu par l'angle infinitésimal $d\theta$, c'est-à-dire, fois R d' θ . D'accord ? Bon. La masse à l'extérieur de notre cylindre, là où elle se trouve, est répartie de manière homogène. Ce qui veut dire que la densité volumique de masse, rouverte, ça va être, par exemple, pour un petit élément de largeur infinitésimale, une petite bande de masse infinitésimale d' EM , c'est le rapport de sa masse divisé par son volume infinitésimal d' EV . Mais c'est aussi la masse totale du cylindre M divisé par le volume dans lequel se trouve la matière qui est V . D'accord ? C'est un peu la même idée que tout à l'heure avec la densité linéique.

notes

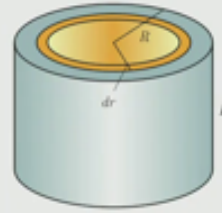
résumé

17m 37s



- **Cylindre plein** : en rotation autour de l'axe de symétrie vertical Ge_3

- Masse : M
- Hauteur : L
- Rayon : R



- **Moment d'inertie** : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm r^2$$

- **Volume infinitésimal** : longueur L , circonférence $2\pi r$ et épaisseur dr

(13.13)

- **Densité volumique** : cylindre plein homogène

$$\rho_V = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$$

(13.8)

On peut donc maintenant écrire que la masse infinitésimale de notre petite bande, c'est la masse volumique trouvée multipliée par le volume infinitésimal d'EV. D'accord ? La masse volumique, c'est la masse divisée par le volume. D'EV, on vient de calculer, on peut le récrire comme RLE fois d'Eta. D'accord ? Alors, maintenant, on prend notre moment d'inertie en substituant en mettant en évidence les grandeurs constantes. On aura donc, pour le moment d'inertie, par rapport à l'axe vertical qui est l'axe symétrie, les grandeurs constantes qui sont M sur V , multipliées par le R qui se trouvait dans le DV et le R^2 qui est ici, ce qui donne globalement un R^3 , multiplié par la hauteur L et l'épaisseur E . Et ce qui nous reste à sommer, eh bien, c'est simplement les variations de l'angle, le long du tour du cylindre. Évidemment que l'angle varie entre 0 et 2π , ce qui nous donne une contribution de 2π , on aura donc $2\pi \times M$ sur $V \times R^3 \times L \times E$. D'accord ? Alors quel est le volume, maintenant, du cylindre creux ? Bon. Alors ce volume V , ça va être la circonférence de la section circulaire du cylindre, soit $2\pi R$, multipliée par son épaisseur, comme l'épaisseur est faible, on peut considérer qu'à ce moment-là, on a tenu compte, disons, de l'ensemble de la surface qui est ici, dans la couronne, que vous voyez en vilavion. D'accord ? Et puis cette surface, il faut encore la multiplier par la hauteur. Donc il faut multiplier par elle. Alors maintenant, si vous prenez ce volume que vous le substituez là-dedans, voyez que les facteurs 2π disparaissent, et les E disparaissent, d'accord ? Et le R^3 va devenir un R^2 puisqu'on divise par R . Et donc au final, on trouve le moment d'inertie le plus simple qu'on puisse imaginer. $I_{G,3}$, c'est tout simplement le produit de la masse du cylindre fois

notes

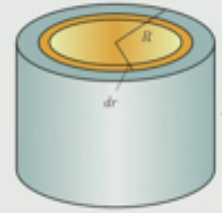
résumé

18m 31s



- **Cylindre plein** : en rotation autour de l'axe de symétrie vertical Ge_3

- Masse : M
- Hauteur : L
- Rayon : R



- **Moment d'inertie** : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm r^2$$

- **Volume infinitésimal** : longueur L , circonférence $2\pi r$ et épaisseur dr

(13.13)

- **Densité volumique** : cylindre plein homogène

$$\rho_V = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$$

(13.8)

le carré du rayon. Et c'est tout. D'accord ? Le facteur qui est devant, c'est un 1. Alors si maintenant, on prend un cylindre plein, qui a la même masse, qui a le même rayon, qui pense que son moment d'inertie sera plus petit que celui du cylindre cru. Levez la main. Pour le cylindre plein. Qui pense que c'est le contraire, que mon moment d'inertie sera plus grand. D'accord ? D'accord. Alors, regardons, faisons le calcul, et voyons ce que ça donne. Oui ? À comment trouve le volume ? Donc, ce qu'on fait, c'est qu'on prend ici la circonférence, d'accord ? Et on la multiplie par E . Ce qui compte tenu du fait que E est petit, sinon ça ne marcherait pas, d'accord ? Donne à peu près au premier ordre, disons, la surface, d'accord, qui est autour. Si vous voulez faire un calcul exact, il faudrait tenir compte du fait que les circonférences internes et externes sont légèrement différentes, et la surface serait légèrement différente. Seulement, dans la limite où l'épaisseur est faible, on peut considérer que la circonférence intérieure et la circonférence extérieure sont à peu près égales. Si on multiplie par l'épaisseur, on a en première approximation la surface de la couronne. C'est ça le raisonnement qui a été suivi pour arriver à ce résultat. Bon, alors calculons maintenant

notes

résumé

- Masse : élément de volume infinitésimal dV

(13.14)

- Moment d'inertie : autour de l'axe Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm r^2$$

- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3 (13.14)

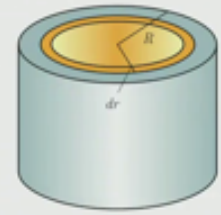
(13.15)

- Volume : cylindre plein

(13.16)

- Moment d'inertie : (13.16) dans (13.15)

(13.17)



le mandrier-ci, donc, d'un cylindre plein. Alors, la stratégie, c'est la suivante, c'est de se baser sur ce qu'on connaît déjà, et de découper notre cylindre plein en cylindre creux concentrique, un peu comme des troncs d'arbres, d'accord ? Vous avez, dans un tronc d'arbres, si vous regardez, vous coupez un arbre, d'accord ? Vous voyez qu'il y a chaque année une épaisseur supplémentaire qui vient s'ajouter, vous voyez des rainures, bien là, c'est pareil. On va prendre notre cylindre plein, qui on va considérer qu'il est formé de petits cylindres creux concentriques, centrés sur l'axe qui nous intéresse, et on connaît déjà les propriétés du cylindre creux. Donc, on va se baser là-dessus, d'accord ? La masse est toujours la même, cette m , la longueur est l'elle, et le rayon est r . D'accord ? Il y a une petite différence maintenant, c'est que lorsqu'on va sommer les contributions des cylindres creux, le rayon vont varier de zéro à grand air. Donc, on ne peut plus mettre un grand air carré, c'est un petit air carré qui apparaît. Ça, c'est la petite distinction formelle en termes calculatoires dans ce calcul. Ensuite, si on prend le volume infinitesimal d'un autre petit cylindre creux, on l'a déjà calculé dans l'exemple précédent, il faut remplacer le rayon grand air par le rayon petit air, il faut remplacer l'épaisseur petit e par une épaisseur infinitesimale, dr . Et alors, le volume infinitesimal, ça sera, depuis, fois le rayon, fois l'épaisseur, fois la hauteur. D'accord ? Tout simplement. C'est la même formule. Remplacez grand air par petit air, vous remplacez petit e par dr , vous avez la même formule. Pour la densité volumique, c'est toujours la même idée. La densité volumique est la même partout. Donc, si on prend un cylindre creux, on prend le rapport de sa masse infinitesimale dm sur son volume infinitesimal dv , on aura le même rapport que si on prend la

notes

résumé

22m 8s



- Masse : élément de volume infinitésimal dV

(13.14)

- Moment d'inertie : autour de l'axe Ge_3

$$I_{G,3} = \int_V dm r^2$$

- Moment d'inertie : autour de l'axe principal d'inertie Ge_3 (13.14)

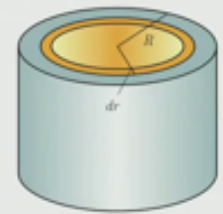
(13.15)

- Volume : cylindre plein

(13.16)

- Moment d'inertie : (13.16) dans (13.15)

(13.17)



masse totale du cylindre plein divisé par son volume total. D'accord ?

notes

résumé



- Le moment d'inertie d'un cylindre plein est la moitié du moment d'inertie d'un cylindre creux de même taille et de même masse. Sur un plan incliné, le moment de force d'entraînement du poids est le même pour les deux cylindres. Ainsi, l'accélération angulaire du cylindre plein est le double de celle du cylindre creux.
- Par conséquent, si ces deux cylindres sont lâchés en même temps de la même hauteur, le cylindre plein atteindra le bas du plan incliné avant le cylindre creux parce que l'accélération de son centre de masse sera le double de celle du cylindre creux.

Dr. Sylvain Bréchet

13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

11 / 49

On peut donc en déduire la masse infinitésimale du cylindre creux, qui est la masse volumique ρ multipliée par le volume infinitésimal dv , soit m sur v , fois $2\pi l r dr$. Là encore, dans l'expression qu'on avait obtenue précédemment, c'était le volume total ici, $\int dv$, on avait un grand a et un petit e . Si vous remplacez grand a par petit a , petit e par petit r , vous avez la même formule. OK ? On va donc prendre ce dm , on le substitue. Dans le moment d'inertie, on met en évidence les grandeurs constantes. On aura donc, pour notre moment d'inertie, le long de l'axe vertical, 2π , fois grand a sur grand v , fois l , et ensuite on se retrouve ici avec un r , un dr , et on a un r^2 . On aura donc un r^3 , fois dr , à intégrer entre un rayon nul et un rayon grand a . Nos petits cylindres concentriques peuvent avoir un rayon qui va de zéro jusqu'à grand a . D'accord ? Donc, on va se retrouver avec 2π grand a sur $v l$, ça ne change pas. La primitive de petit a au cube, c'est un quart de petit a à la puissance 4, évalué entre zéro et grand a . D'accord ? Ce qui nous donne π sur 2, fois grand m sur grand v , fois l , fois grand a à la puissance 4. Le volume, maintenant, de notre cylindre plein, celui-ci est assez simple à calculer, c'est le produit de la section circulaire multiplié par la hauteur, la section circulaire à une surface qui est πa^2 ou r^2 , qu'on multiplie par la hauteur et on a le volume. D'accord ? Donc, on divise maintenant par le volume. Voyez que la hauteur, ça simplifie avec celle qui est présente au numérateur. Ensuite, les π vont se simplifier. D'accord ? On a un r^2 , on a au dénominateur un r^2 , ça donne un r^2 . On va donc

notes

résumé

24m 10s





- Le moment d'inertie d'un cylindre plein est la moitié du moment d'inertie d'un cylindre creux de même taille et de même masse. Sur un plan incliné, le moment de force d'entraînement du poids est le même pour les deux cylindres. Ainsi, l'accélération angulaire du cylindre plein est le double de celle du cylindre creux.
- Par conséquent, si ces deux cylindres sont lâchés en même temps de la même hauteur, le cylindre plein atteindra le bas du plan incliné avant le cylindre creux parce que l'accélération de son centre de masse sera le double de celle du cylindre creux.

se retrouver avec un moment d'inertie I_{G3} , qui va être en m^2 , sans surprise, et le facteur qui est devant, c'est une demi. Le moment d'inertie est plus faible. Pourquoi ? Parce que si vous avez un cylindre plein, la matière est répartie dans l'ensemble du volume autour de l'axe, donc elle est en moyenne plus proche que si vous avez un cylindre creux ou la matière est répartie uniquement sur la circonférence, cette différence se traduit par le calcul, la résolution de cette intégrale, par un facteur une demi. Donc, le moment d'inertie d'un cylindre creux par rapport à un cylindre plein qui ont la même masse, qui ont le même rayon, la même hauteur, même si la hauteur ne joue aucun rôle. C'est un facteur une demi. On parle d'autres cylindres, avec une barre, est-ce que la barre est déjà... Très bonne question. Alors, je pense que ça dépend des dimensions de la barre. Si vous avez une barre qui est très fine, et que vous regardez le moment d'inertie d'un cylindre fixé sur une barre, la barre est verticale, si vous pouvez négliger l'épaisseur de la barre, ça ne change rien. En revanche, si l'épaisseur de la barre n'est pas négligeable, la barre est elle-même un cylindre. D'accord ? Auquel cas, il faudra ajouter les contributions liées à cette barre-là. D'accord ? Donc, ça dépend un petit peu du contexte. Mais quand vous avez un objet plus compliqué, il faut tenir compte de toutes les contributions à l'inertie en général. D'accord ? Alors, on pourrait imaginer un problème plus tordu qui a parfois été traité dans des problèmes, dans des examens de physique. Pas le mien, je vous rassure. C'est le cas où vous avez, par exemple, un cylindre, et puis vous enlevez un cylindre dans le cylindre. Alors, vous pouvez l'enlever au centre, d'accord ? Ou alors, vous pouvez être plus tordu. Elle est enlevée de

notes

résumé



- Le moment d'inertie d'un cylindre plein est la moitié du moment d'inertie d'un cylindre creux de même taille et de même masse. Sur un plan incliné, le moment de force d'entraînement du poids est le même pour les deux cylindres. Ainsi, l'accélération angulaire du cylindre plein est le double de celle du cylindre creux.
- Par conséquent, si ces deux cylindres sont lâchés en même temps de la même hauteur, le cylindre plein atteindra le bas du plan incliné avant le cylindre creux parce que l'accélération de son centre de masse sera le double de celle du cylindre creux.

manière décalée, de sorte que l'axe du cylindre qui a été enlevée dans le cylindre est décalée par rapport au cylindre de départ. Là, le calcul du moment d'inertie peut se faire. L'idée la suivante, pensez à l'algèbre linéaire. Vous faites une combinaison linéaire. Donc, ce qu'il faut imaginer, c'est que quand vous avez un cylindre plein et que vous enlevez à l'intérieur du cylindre plein, vous imaginez prendre le cylindre plein, vous calculez ce moment d'inertie, et vous allez calculer le moment d'inertie lié aux trous que vous avez remplis, qui seraient un cylindre plein, et vous allez les soustraire. Et ça, ça va vous donner le moment d'inertie totale. D'accord ? Bon, on ne va pas faire ce genre d'exercice, mais on pourrait le faire. D'accord ? Je vous montrerai d'ailleurs ce qui se passe avec des cylindres un peu pathologiques tout à l'heure, dans quelques instants. On va le faire maintenant, d'ailleurs, sur la rampe.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....

13.2 Solide indéformable avec un axe fixe

13.2.1 Théorème de Huygens-Steiner

13.2.2 Energie cinétique d'un solide indéformable

13.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

13.2.4 Roue mal équilibrée

D'accord ? Oui ? Vous avez encore une question ? Je vous ai élevé la main. Ah, d'accord, réfléchissez par rapport au... OK, très bien. Donc, on va tester ce qu'on vient d'affirmer. D'accord ? A savoir que si on a des cylindres qui ont des moments d'inertie différents, eh bien, leur dynamique sera différente. On pourrait le faire avec un cylindre cru, un cylindre plein qui ont la même masse, le même rayon et la même hauteur. Oui ? Par exemple, vous avez connu un autre axe de rotation à un autre axe de rotation. Oui ? C'est-à-dire, vous avez connu un autre axe de rotation ? Alors, si vous prenez un autre axe de rotation, ce qu'il faudrait faire, c'est utiliser le théorème qu'on va établir dans quelques instants, qui est le théorème du Gensteiner. Donc, votre cylindre, il a un moment d'inertie I_{G3} par rapport à l'axe vertical. D'accord ? Imaginons maintenant que vous prenez un axe qui est décalé d'une distance d par rapport à cet axe vertical et que vous faites tourner le cylindre autour. Le moment d'inertie par rapport à cet axe-là, ça va être le moment d'inertie de départ, plus le produit de la masse du cylindre multiplié par le carré de la distance qui sépare les axes. D'accord ? Pour revenir au problème des cylindres sur le plan incliné, d'accord ? Si on n'a pas un cylindre plein et un cylindre cru identique, on peut jouer sur les masses avec des cylindres formés de deux matériaux différents. Prenons des cylindres qui ont le même rayon, qui ont globalement la même masse, d'accord ? Mais où on a deux cylindres concentriques, un cylindre qui est en cuivre et l'autre qui est dans un matériau qui est de sorte de résine. D'accord ? Il est clair que la résine va être plus légère que le cuivre. Donc maintenant, si vous avez le cuivre au

notes

résumé

28m 47s



13.2 Solide indéformable avec un axe fixe

13.2.1 Théorème de Huygens-Steiner

13.2.2 Energie cinétique d'un solide indéformable

13.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

13.2.4 Roue mal équilibrée

centre et la résine à l'extérieur, vous avez le matériau lourd au centre, le matériau qui va le plus contribuer à l'inertie, et vous aurez donc un moment d'inertie qui va être plus faible que si vous aviez fait le contraire. Si vous placez le cuivre à l'extérieur, ces matériaux lourds, la résine au centre, globalement, le produit de la masse faut la distance au carré, si vous summez, va être plus grand. D'accord ? Et c'est ce qu'on va voir ensemble. On va prendre donc deux objets, deux cylindres qui ont la même masse, mais qui sont formés de deux matériaux différents. Le moment d'inertie de l'objet pour lequel le cuivre, le matériau lourd et à l'extérieur, sera plus grand que pour l'autre. Et l'accélération du centre de masse va être proportionnelle à l'accélération angulaire. D'accord ? L'accélération angulaire, si le moment d'inertie, si le moment de force qui est appliqué elle-même, et ce sera le cas pour les deux cylindres, de moment de force évalué par rapport au point de contact et celui du poids, d'accord ? À ce moment-là, on va avoir une accélération du centre de masse qui est inversement proportionnelle au moment d'inertie. D'accord ? Plus le moment d'inertie sera grand, plus l'accélération du centre de masse sera petite, ce qui est assez raisonnable. Donc, le cylindre qui arrivera en premier au bas de la rampe, c'est celui qui a le moment d'inertie le plus petit, c'est celui pour lequel la résine est à l'extérieur et le cuivre est à l'intérieur. Vérifions ceci. On a ici le cylindre le plus lourd, qui a du cuivre à l'extérieur de la résine à l'intérieur. Là, on a le contraire. Donc, le plus léger, c'est celui qui est proche de vous. C'est celui qui doit arriver en premier au bas. Vérifions pour voir. Bingo. D'accord ? La physique est respectée. Alors, on peut avoir des cylindres pathologiques comme

notes

résumé

13.2 Solide indéformable avec un axe fixe

13.2.1 Théorème de Huygens-Steiner

13.2.2 Energie cinétique d'un solide indéformable

13.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

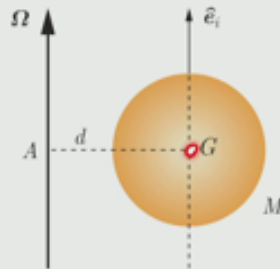
13.2.4 Roue mal équilibrée

celui-ci, par exemple. Je ne vous montre pas ce qu'il y a derrière. Regardez bien ce qu'il a passé. On le refait ? Je le pose comme ceci. Puis, maintenant, je le tourne de 180 degrés. Et pas tant, hein ? C'est un cylindre truqué. Vous avez, si vous regardez bien, un cylindre en métal d'un petit rayon qui est plaqué sur la surface. Alors, suivant comment vous l'orientez, vous allez pouvoir trouver un état d'équilibre. Et il va d'abord remonter un peu. C'est ce qu'on a vu ici. D'accord ? C'est cette situation. Si vous le placez dans l'autre sens, il n'y aura pas d'état d'équilibre. Par contre, il y aura des accous. Il va descendre avec des accous. C'est bon, la physique du solide indéformable ? Ça paraît magique, et pourtant, c'est de la bonne physique. Voilà.

notes

résumé

- **Théorème de Huygens-Steiner** : on cherche à déterminer le moment d'inertie $I_{A,i}$ d'un solide indéformable quelconque de masse M en rotation à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{e}_i$ autour d'un axe Ae_i qui passe par le point A et qui est parallèle à l'axe principal d'inertie Ge_i . On désire l'exprimer en fonction du moment d'inertie $I_{G,i}$ supposé connu. Les axes Ae_i et Ge_i sont séparés d'une distance $d = \|AG\|$.



Christian Huygens

1629 – 1695



Jacob Steiner

1796 – 1863



Alors, établissons maintenant ensemble le théorème Duganssteiner. Qu'on doit à Christian Huygens, qui a fait des travaux remarquables en physique en optique, surtout. D'accord ? Mais également à Jakob Steiner, qui était un physicien suisse. Bon. Encliné, dans un cas pratique, d'accord ? Si on prend un cylindre, qu'on place sur un plan incliné, connaissent son moment d'inertie par rapport à l'axe qui passe par le sang de masse, d'accord ? Qui, s'il est homogène, ce n'est pas le cas ici, mais s'il est homogène, c'est le produit de la masse folle rayon au carré, multiplié par un facteur une demi, puisqu'il est plein. D'accord ? Nous, ce qu'on veut, ce n'est pas le moment d'inertie par rapport à cet axelat, c'est le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle qui passe par le point de contact, d'accord ? Dans la pratique, c'est cet axelat qui est intéressant. Pour les calculs, parce que, comme on le verra, ça permet d'être plus efficace, de calculer moins et d'arriver plus rapidement au but. Donc, quand on a quelque chose de plus simple, en général, on l'exploite. D'accord ? Alors, pour répondre à cette question, on va prendre le cas suivant d'un objet. Alors, ici, c'est une sphère, d'accord ? On met en rotation autour d'un axe. Le centre de masse de la sphère reste à distance constante de l'axe. Le point qui est à la même hauteur, c'est le point A, d'accord ? L'axe vertical pour la sphère, c'est un axe principal d'inertie. Si on avait pris un autre objet, il faudrait prendre un axe principal d'inertie d'objet. On pourrait avoir, par exemple, un cylindre, comme ceci, ça serait la même idée. D'accord ? Donc, on a un axe principal d'inertie qui passe par le centre de masse, qui est l'axe GEI, qui est ici, d'accord ? Et nous, ce qu'on veut, c'est le moment d'inertie par rapport à l'axe de

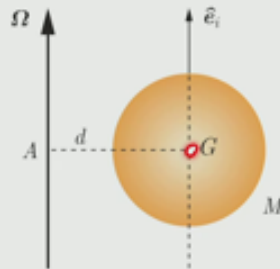
notes

résumé

33m 22s



- **Théorème de Huygens-Steiner** : on cherche à déterminer le moment d'inertie $I_{A,i}$ d'un solide indéformable quelconque de masse M en rotation à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{e}_i$ autour d'un axe $A e_i$ qui passe par le point A et qui est parallèle à l'axe principal d'inertie $G e_i$. On désire l'exprimer en fonction du moment d'inertie $I_{G,i}$ supposé connu. Les axes $A e_i$ et $G e_i$ sont séparés d'une distance $d = \|AG\|$.

**Christian Huygens**

1629 – 1695

**Jacob Steiner**

1796 – 1863



rotation qui est là, qui passe par le point A, sachant que l'axe dit... Enfin, en considérant, plutôt, le moment d'inertie par rapport à l'axe principal d'inertie, ici, connu. C'est ça l'objectif de cette théorème, d'accord ? Donc, on a un vecteur vitesse angulaire, omega, et le point qui correspond au centre de masse

notes

résumé

- Théorème de transfert du moment cinétique : (12.17) évalué en $O \equiv A$

(13.18)

- Mouvement circulaire : G autour de A

(13.19)

- Moment cinétique : (13.19) dans (13.18)

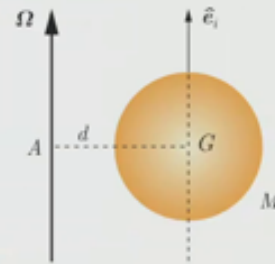
(13.20)

- Identité vectorielle : (1.44) dans (13.20)

(13.21)

- Identités géométriques :

(13.22)



aura un mouvement circulaire en vue d'avion autour de cet axe. D'accord ? Ça, c'est les données de départ. Bon. Alors, puis, la distance qui sépare le point A du point G, c'est la distance D.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....

.....

35m 25s



- Moment cinétique : évalué en A (13.21)

$$L_A = M \left(AG^2 \Omega - (AG \cdot \Omega) AG \right) + L_G$$

- Identités géométriques :

$$AG^2 = d^2 \quad \text{et} \quad AG \cdot \Omega = 0 \quad (13.22)$$

- Moment cinétique :

$$(13.23)$$

- Moments d'inertie : moments cinétiques L_G et L_A colinéaires à Ω

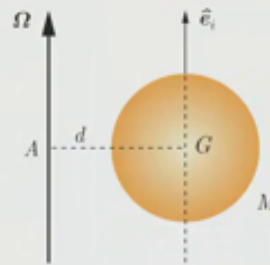
$$(13.24)$$

- Moment cinétique : évalué en A

$$(13.25)$$

- Théorème de Huygens-Steiner : formule de Steiner

$$(13.26)$$



La première chose à faire, c'est de transférer le moment signétique. C'est donc d'exploiter un théorème de transfert qu'on a établi la semaine passée. Si vous prenez le point A, le point A, il est fixe. Donc, on peut prendre le théorème de transfert entre l'origine qui était fixe, d'accord ? Et le centre de masse G. On va simplement appeler A notre point O dans le théorème qu'on a établi. Donc, le théorème, c'était L O, donc ici, L A, qui est égal à O G, donc A G, produit vectoriel avec M V G plus L G. Ça, c'est le point de départ. D'accord ? Maintenant, le centre de masse, il a un mouvement circulaire autour du point A. Très bien. Le point A, il est fixe. Donc, le centre de masse V G, c'est le produit vectoriel de omega avec A G, si vous voulez, en prenant, par exemple, la relation qu'il y ait des points matériels d'insolidin déformable, puisque la distance est fixe entre le point A et le point G, on peut l'exploiter compte tenu du fait que la vitesse du point A est nulle, on tombe sur le même résultat. On va prendre cette vitesse du centre de masse qu'on substitue dans le moment signétique. Et donc, le moment signétique évalué en A et l'un, sera le produit de la masse, il faut être le produit vectoriel entre A G, produit vectoriel avec la vitesse du centre de masse, qui est le produit vectoriel de omega avec A G. D'accord ? Et puis, il faut ajouter L G. Bon. Quand on a un produit vectoriel de produit vectoriel, ce à quoi il faut tout de suite penser, et rappelez-vous de ceci en exercice et surtout à l'examen, si vous avez un produit vectoriel de produit vectoriel, pensez à une formule qui permet de le récrire avec des produits scalaires. C'est toujours la même. C'est

notes

résumé

35m 37s



- Moment cinétique : évalué en A (13.21)

$$L_A = M \left(AG^2 \Omega - (AG \cdot \Omega) AG \right) + L_G$$

- Identités géométriques :

$$AG^2 = d^2 \quad \text{et} \quad AG \cdot \Omega = 0 \quad (13.22)$$

- Moment cinétique :

$$(13.23)$$

- Moments d'inertie : moments cinétiques L_G et L_A colinéaires à Ω

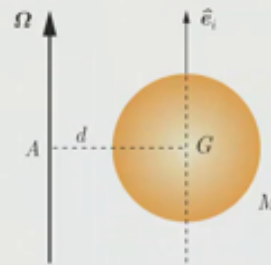
$$(13.24)$$

- Moment cinétique : évalué en A

$$(13.25)$$

- Théorème de Huygens-Steiner : formule de Steiner

$$(13.26)$$



la relation 1,44. D'accord ? Cette relation nous permet alors d'écrire le moment signétique en A, comme la masse, fois quoi, fois le produit vectoriel de A G, donc du premier vecteur avec le dernier, le produit scalaire, pardon, de A G avec A G, donc A G carré, multiplié par omega, moins le produit scalaire entre A G et omega, multiplié par A G. D'accord ? Plus L G. Regardez la géométrie. A G est horizontal, omega est vertical, ils sont orthogonaux, et donc leur produit scalaire est nul, ce qui veut dire que ce terme-là disparaît. D'accord ? Donc écrivons ça. Le produit scalaire entre A G et omega est nul. D'autre part, la norme de A G, c'est D, donc le carré de A G, c'est simplement la distance D au carré, qui sépare le point A du point G. Compte tenu de ces deux résultats,

notes

résumé

- Solide indéformable : ensemble de points matériels α
- Energie cinétique : solide indéformable

(13.27)

- Identités des vitesses : vitesse v_α et vitesse relative v'_α

$$v_\alpha = V_G + v'_\alpha \quad (11.72)$$

- Energie cinétique : (11.72) dans (13.27)

(13.28)

- Energie cinétique : (13.28) développée

(13.28)

on peut maintenant écrire que le moment cinétique évalué au point A, c'est la masse fois G au carré qui est décarée, fois omega, plus L G. Bon. Qu'est-ce qu'on sait sur L G ? Le moment cinétique de notre solide indéformable évalué par rapport à G, d'accord ? Va pouvoir s'exprimer comme le produit des moments d'inertie, il faut aller composant des vecteurs vitesses angulaires. Là, clairement, il y a une composante non nul, qui est la composante verticale. On a une rotation qui se fait autour d'un axe principal d'inertie. Dans ce cas-là, le moment cinétique en G, c'est le moment d'inertie multiplié par omega. D'accord ? Donc L G sera I G I, le moment d'inertie par rapport à l'axe principal d'inertie qui est ici, multiplié par omega. Que peut-on alors dire sur L A ? Eh bien, le terme qui est ici est proportionnel à omega. Le premier aussi, donc L A doit être proportionnel à omega, ce qui veut dire que L A est de la forme suivante. Un moment d'inertie évalué par rapport à l'axe qui passe par le point A, qui est I A I. C'est une virgule L A I, voilà. Je vais le récréer. Alors, voilà. Multiplié donc par omega. Maintenant, on effectue la substitution. On a donc, pour le moment cinétique évalué en A, le produit du moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle qui passe par le point A, multiplié par omega, qui est égal donc à I G I plus M décaré qui multiplie omega. C'est vrai, quelque soit au régal. Donc, les facteurs qui multiplient omega doivent être les mêmes dans le nombre de gauche et le nombre de droite, ce qui nous livre sur un plateau. Le théorème du Gensteiner, qui nous dit alors que le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle à l'axe principal d'inertie qui passe par le point A, c'est le moment

notes

résumé

38m 15s



- Solide indéformable : ensemble de points matériels α
- Energie cinétique : solide indéformable

(13.27)

- Identités des vitesses : vitesse v_α et vitesse relative v'_α

$$v_\alpha = V_G + v'_\alpha \quad (11.72)$$

- Energie cinétique : (11.72) dans (13.27)

(13.28)

- Energie cinétique : (13.28) développée

(13.28)

d'inertie par rapport à l'axe principal d'inertie qui passe par le point G, auquel on ajoute le moment d'inertie, du, disons, au décalage entre les deux axes parallèles, qui est le produit de la masse du sol indéformable, multiplié par le carré de la distance qui sépare les axes. D'accord ? Voilà. Donc, la dérivation de ce calcul n'est pas importante. Ce qui compte, c'est de se rappeler du résultat. Et il est très facile à retenir. Oui ? ... Alors, je l'ai pas fait ici volontairement. On peut le faire. A mon avis, ça n'apporte rien dans ce cours. On peut le faire directement au niveau du temps soeur d'inertie en prenant des axes parallèles par rapport à des axes qui ne sont pas des axes principaux à l'inertie, mais c'est plus compliqué. ... Ca revient à faire ceci. Maintenant, dans la pratique, on dit vos calculatoires. Quand vous avez un problème à résoudre, en général, ce que vous commencez par faire, c'est de choisir des axes principaux d'inertie pour vous simplifier la vie. Donc, automatiquement, par la démarche même que vous allez suivre, vous allez vous retrouver dans un carcan qui vous impose de prendre des moments d'inertie par rapport à des axes qui sont parallèles à des axes principaux d'inertie. Mais ce n'est pas le cas le plus général. D'ailleurs, ce théorème, c'est le théorème du Genssteiner, puisque l'approche de Jürgens, c'est ce que vous voyez là, l'approche de Steiner, c'est celle que vous venez de mentionner, Martin, c'est de généraliser ceci pour des axes qui ne sont pas des axes principaux d'inertie. C'est faisable. Si ça vous intéresse, il me semble que c'est fait dans le livre de cours, dans le livre d'Encermé. Vous pouvez jeter un coup d'œil au cas général. Voilà.

notes

résumé

- **Energie cinétique :**

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) V_G^2 + V_G \cdot \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 \quad (13.28)$$

- **Quantité de mouvement relative :** nulle

$$P' = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} = 0 \quad (11.74)$$

- **Energie cinétique :** (11.74) dans (13.28)

$$(13.29)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse G et le deuxième terme est l'énergie cinétique relative T' du mouvement de rotation propre.

- **Energie cinétique relative :** mouvement de rotation propre

$$(13.30)$$

On va maintenant déterminer l'énergie cinétique d'un solide indéformable qui est un ensemble de points matériels. D'accord ? L'énergie de chaque point matériel va se sommer pour trouver l'énergie du solide indéformable. C'est une grandeur extensive. Donc, l'énergie cinétique totale, ça va être une demi de la somme sur les points matériels du produit, de leur masse, fois leur vitesse au carré. D'accord ? Leur vitesse au carré par rapport à un point fixe, par rapport à une origine, par rapport à un référentiel d'inertie. Le référentiel qui nous intéresse, c'est celui d'un solide indéformable. Nous, ce qu'on aimerait voir, c'est ce qui se passe par rapport au centre de masse. Qu'est-ce qu'on va faire ? On va décomposer le vecteur vitesse par rapport au référentiel d'inertie pour le point matériel alpha. On a la somme du vecteur vitesse du point matériel, plus le vecteur vitesse relatif par rapport... Non, à la vitesse du centre de masse, plus la vitesse relative du point matériel par rapport au centre de masse. On fait une décomposition en passant du référentiel d'inertie au référentiel du centre de masse. D'accord ? Alors, grâce à ça, on va pouvoir réécrire notre énergie cinétique. C'est une demi de la somme sur alpha, d'e.m. alpha, qui multiplie V_G plus V_{α}' qu'on allait évoquer. Et c'est ce carré qui est intéressant. D'accord ? Maintenant, il faut développer ce carré pour voir la structure apparaître. D'accord ? On aura donc une demi de la somme sur les points matériels du produit de leur masse fois le premier carré, qui est V_G carré. On a ensuite le double produit, mais comme on a un facteur, une demi, le facteur 2 se simplifie. On aura le produit scalaire, donc, de la vitesse du centre de masse avec la somme sur les points matériels du produit de leur masse fois leur vitesse relative. Et il nous reste le troisième terme, le

notes

résumé

42m 10s



- **Energie cinétique :**

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) V_G^2 + V_G \cdot \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 \quad (13.28)$$

- **Quantité de mouvement relative :** nulle

$$P' = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} = \mathbf{0} \quad (11.74)$$

- **Energie cinétique :** (11.74) dans (13.28)

$$(13.29)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse G et le deuxième terme est l'énergie cinétique relative T' du mouvement de rotation propre.

- **Energie cinétique relative :** mouvement de rotation propre

$$(13.30)$$

deuxième carré, qui est une demi de la somme sur alpha, d.m. alpha, Valpha prime au carré. Alors...

notes

résumé

- **Energie cinétique relative** : mouvement de rotation propre

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 \quad (13.30)$$

- **Identités des vitesses** : solide indéformable

$$v_{\alpha} = V_G + \Omega \times GP_{\alpha} = V_G + \Omega \times r'_{\alpha} \quad (12.7)$$

- **Identités des vitesses** : (12.7) dans (11.40)

$$(13.31)$$

- **Vitesse relative** : (13.31) au carré

$$(13.32)$$

- **Identité du produit mixte** : $a = \Omega$ et $b = r'_{\alpha}$ et $c = \Omega \times r'_{\alpha}$

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a \quad (1.41)$$

On va juste finir ce slide. Donc, qu'est-ce qu'on a vu au chapitre 11 ? On a vu que toute la quantité de mouvement était portée par le centre de masse, ce qui veut dire que la quantité de mouvement lié au mouvement relatif par rapport au centre de masse est nul. La somme sur les points matériels du produit de leur masse fois leur vitesse relative est nul. D'accord ? Ce qui veut dire que le terme qui est ici est nul. Donc, il va nous rester les deux autres termes, soit une demi, de la somme sur les points matériels de leur masse, qui est la masse totale du solide indéformable, fois la vitesse du centre de masse au carré, plus le dernier terme, qui est une demi sur les points matériels de leur masse, fois leur vitesse relative au carré. Saint, c'est l'énergie séptique associée au mouvement du centre de masse. Si on avait le modèle du point matériel, on aurait uniquement ce terme. Maintenant, il y a un terme supplémentaire qui est dû à la rotation du solide indéformable autour de l'axe qui passe par le centre de masse. D'accord ? On s'en doute bien. Derrière, ceci va se cacher des moments d'inertie. On va également retrouver des vecteurs vitesses angulaires qu'on va pouvoir exprimer dans le repère d'inertie. C'est ce qui nous attend après la pause. Mais avant la pause, j'aimerais passer la parole à deux personnes. Tout d'abord, à Thomas. Voilà donc... Je réponds à une question qui m'a été posée à plusieurs reprises durant la pause. Écoutez bien, c'est important. À l'examen... À l'examen, je disais, vous n'aurez pas de calcul de moments d'inertie à faire. Les moments d'inertie vous seront donnés. C'est juste histoire de comprendre, c'est finalement de l'analyse. Et vous avez vu qu'ils ont été structurés et choisis dans un ordre bien particulier. Pour pouvoir chaque fois résoudre une seule

notes

résumé

44m 17s



- **Energie cinétique relative** : mouvement de rotation propre

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 \quad (13.30)$$

- **Identités des vitesses** : solide indéformable

$$v_{\alpha} = V_G + \Omega \times GP_{\alpha} = V_G + \Omega \times r'_{\alpha} \quad (12.7)$$

- **Identités des vitesses** : (12.7) dans (11.40)

$$(13.31)$$

- **Vitesse relative** : (13.31) au carré

$$(13.32)$$

- **Identité du produit mixte** : $a = \Omega$ et $b = r'_{\alpha}$ et $c = \Omega \times r'_{\alpha}$

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a \quad (1.41)$$

intégrale par rapport à une seule variable, alors qu'en réalité, dans l'espace à trois dimensions, il faudrait utiliser des intégrales triples. Volontairement, on l'a pas fait. Mais bon, on peut ensuite prendre des moments d'inertie beaucoup plus compliqués. Ce n'est pas le but ici. Le but, c'est d'avoir quelques moments d'inertie qui permettent de résoudre la plupart des problèmes intéressants. Le cylindre, la sphère, on l'a pas fait, mais si vous avez une sphère à l'examen, vous aurez le moment d'inertie ou alors il vous sera simplement dit comme étant un moment d'inertie, j'ai. D'accord ? Voilà. Maintenant, pour l'énergie cinétique, on a vu qu'il y a deux termes, un terme qui est lié au mouvement du sang de masse et un terme qui est lié au mouvement de rotation propre autour du sang de masse. C'est ce dernier terme qui va nous intéresser maintenant. C'est cette énergie cinétique relative, tes primes, qui est une demi de la somme, sur les points matériels du produit de leur masse fois leur vitesse relative élevée au carré. Alors,

notes

résumé

- **Energie cinétique relative** : mouvement de rotation propre

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 \quad (13.30)$$

- **Identité du produit mixte** : invariance par permutation cyclique

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a \quad (1.41)$$

- **Identité du produit mixte** : $a = \Omega$, $b = r'_{\alpha}$, $c = \Omega \times r'_{\alpha}$

$$v_{\alpha}'^2 = (\Omega \times r'_{\alpha}) \cdot (\Omega \times r'_{\alpha}) = \quad (13.32)$$

- **Energie cinétique relative** :

$$(13.33)$$

- **Moment cinétique** : évalué en G (11.67) dans (12.40)

$$(13.34)$$

pour aller plus loin, on va maintenant devoir tenir compte du fait qu'on a un solide indéformable et on va donc exprimer la vitesse du point matériel alpha comme la somme de la vitesse du sang de masse. D'accord ? Plus le produit vectoriel de omega avec la position relative, puisque alpha et g sont deux points qui appartiennent au solide indéformable. La position relative gp alpha, c'est le vecteur r alpha prime. Donc, on a vg plus le produit vectoriel de omega avec r alpha prime. Donc, ce qui nous intéresse, nous, c'est la vitesse relative v alpha prime, qui est v alpha moins vg. Ce sera donc le produit vectoriel de omega avec la position relative r alpha prime. Dans l'énergie cinétique relative, ce qui apparaît, c'est le carré de cette vitesse relative, c'est v alpha prime au carré, qui est donc le produit scalaire de v alpha prime avec v alpha prime, soit le produit scalaire du produit vectoriel de omega avec r alpha prime, produit scalaire avec lui-même, donc avec omega produit vectoriel avec r alpha prime. Nous, ce qu'on aimerait faire, c'est obtenir une énergie cinétique liée au mouvement de rotation propre qui dépend de omega. Donc, on va utiliser une propriété intéressante qu'on a établie la première semaine. C'est la propriété d'invariance par permutation cyclique du produit mixte. D'accord ? Bon, c'est un terme en poulet, mais qui veut dire la chose suivante. Si vous avez le produit mixte de 3 vecteurs, A, B, C, si au lieu de commencer par le vector A, vous commencez par le vector B, vous allez obtenir le même résultat en tournant de manière cyclique. Alors, A chez nous, c'est omega. Il est là. B, c'est r prime, il est là. C, c'est le produit vectoriel de omega avec r prime. Donc, maintenant, on va tenir compte de cette identité pour réécrire différemment le produit scalaire qu'on retrouve

notes

résumé

47m 22s



- **Energie cinétique relative** : mouvement de rotation propre

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}'^2 \quad (13.30)$$

- **Identité du produit mixte** : invariance par permutation cyclique

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a \quad (1.41)$$

- **Identité du produit mixte** : $a = \Omega$, $b = r'_{\alpha}$, $c = \Omega \times r'_{\alpha}$

$$v_{\alpha}'^2 = (\Omega \times r'_{\alpha}) \cdot (\Omega \times r'_{\alpha}) = \quad (13.32)$$

- **Energie cinétique relative** :

$$(13.33)$$

- **Moment cinétique** : évalué en G (11.67) dans (12.40)

$$(13.34)$$

ici pour le carré de la vitesse relative du point matériel alpha. Donc, concrètement,

notes

résumé

- Energie cinétique relative : (13.34) dans (13.33)

(13.35)

- Energie cinétique : où $P = M V_G$

(13.36)

- Moment cinétique : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$L_G = \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{e}_j$$

(12.51)

- Vitesse angulaire : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{e}_i$$

(12.43)

- Energie cinétique relative : où $\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = \delta_{ji}$ donne (13.37)

on va réécrire ceci comme le produit vectoriel, le produit vectoriel du vector B, qui est r_{α}' , avec le vector C, qui est lui-même le produit vectoriel de ω avec r_{α}' . Pour l'instant, ça a l'air plus compliqué. Et on prend le produit scalaire avec A, qui est ω . D'accord ? Donc, l'énergie signétique relative des primes devient alors une demi de la somme sur α des masses des points matériels fois le produit vectoriel du vector position relative avec le produit vectoriel du vector vitesse angulaire avec la position relative. Et globalement, on prend un produit scalaire avec ω . Alors, cette expression paraît compliquée. En réalité, on la connaît déjà. Pourquoi ? Parce que le vector position relative, r_{α}' , c'est le vector GP α . Alors, si vous reprenez les termes qui s'entendent entre parenthèses ici, et que vous remplacez r_{α}' par GP α , ce que vous reconnaissez, si vous avez bien suivi le cours d'aspect le passé, c'est le moment signétique évalué au centre de masse. Ça, c'est I_G . Donc, I_G , on va le réécrire ici, c'est la somme sur α de m_{α} fois le produit vectoriel de r_{α}' avec le produit vectoriel de ω avec r_{α}' . D'accord ? Ce qui nous permet d'avoir une expression toute simple pour l'énergie signétique relative, c'est le produit scalaire de I_G avec ω multiplié par une demi. D'accord ?

notes

résumé

49m 32s



- Energie cinétique relative : (13.34) dans (13.33)

$$T' = \frac{1}{2} \overline{L_G} \cdot \overline{\mathcal{L}} \quad (13.35)$$

- Energie cinétique : où $P = M V_G$

$$T = \frac{1}{2} M \overline{V_G}^2 + T' = \frac{1}{2} \overline{P} \cdot \overline{V_G} + \frac{1}{2} \overline{L_G} \cdot \overline{\mathcal{L}} \quad (13.36)$$

- Moment cinétique : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$L_G = \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{e}_j \quad (12.51)$$

- Vitesse angulaire : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{e}_i \quad (12.43)$$

- Energie cinétique relative : où $\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = \delta_{ji}$ donne (13.37)

notes

résumé

51m 12s



- Energie cinétique relative : (13.34) dans (13.33)

$$T' = \frac{1}{2} \overline{L_G} \cdot \overline{\mathcal{L}} \quad (13.35)$$

- Energie cinétique : où $P = M V_G$

$$T = \frac{1}{2} M \overline{V_G}^2 + T' = \frac{1}{2} \overline{P} \cdot \overline{V_G} + \frac{1}{2} \overline{L_G} \cdot \overline{\mathcal{L}} \quad (13.36)$$

- Moment cinétique : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$L_G = \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{e}_j \quad (12.51)$$

- Vitesse angulaire : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{e}_i \quad (12.43)$$

- Energie cinétique relative : où $\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = \delta_{ji}$ donne (13.37)

C'est là qu'on va faire intervenir les moments d'inertie. Donc, prenons le moment scientifique,

notes

résumé

- **Vitesse** : centre de masse dans le repère d'inertie ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

(13.38)

- **Energie cinétique** : axe de rotation quelconque

(12.39)

Le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse G et le deuxième terme est l'énergie cinétique relative du mouvement de rotation propre pour un axe de rotation quelconque.

- **Vitesse angulaire** : orientée selon l'axe principal d'inertie Ge_i

(12.40)

- **Energie cinétique** : axe de rotation fixe selon l'axe principal d'inertie Ge_i

(12.41)

exprimer dans le repère d'inertie, comme la somme des moments d'inertie multipliés par les composantes du vecteur vitesse angulaire, selon les axes principaux d'inertie, multipliés par les vecteurs unitaires eux-mêmes. D'accord ? La vitesse angulaire, on peut aussi l'exprimer dans ce repère d'inertie, et maintenant, on peut détailler ceci au niveau du calcul. On aura donc l'énergie scientifique relative, qui est une demi du produit scalaire du moment cinétique évalué au 100 de masse fois le vecteur vitesse angulaire. C'est donc une demi de Lg , qui est la somme sur g égale 1 à 3, du produit des moments d'inertie, les I_g , multipliés par les composantes d'avité angulaire, les ω_g , fois les vecteurs unitaires du repère d'inertie, les E_g , chapeaux. Et on prend le produit scalaire avec ω , qu'on obtient en prenant la somme sur l'indice i , volontairement on les distingue dans un premier temps, sur l'indice i , qui varie de 1 à 3. Des composantes de ω , les ω_i , fois les vecteurs unitaires du repère d'inertie, les E_i , chapeaux. Maintenant, il faut se rappeler qu'on a un repère orthonormé d'inertie, ce qui veut dire que le produit scalaire de deux vecteurs identiques nous donne 1, si c'est des vecteurs différents, ils sont orthogonaux, ça donne 0, ce qui s'encode mathématiquement, en disant que le produit scalaire du j -m-vecteur du repère d'inertie, multiplié par le i -m, nous donne le symbole de chronécaire delta $i g$. D'accord ? Donc, pour que les termes soient non-nuls dans ce produit scalaire, il faut que l'indice g soit égal à l'indice i . On va donc sommer à l'aide d'une seule somme, on pourrait sommer sur i ou j à choix, somment sur j , disons. On va se retrouver avec un facteur 1,5. On aura la somme sur j égale à 1 à 3. Et ce qu'on va multiplier, c'est les moments d'inertie correspondants, les i, g, j , fois les composantes

notes

résumé

53m 13s



- **Vitesse** : centre de masse dans le repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

(13.38)

- **Energie cinétique** : axe de rotation quelconque

(12.39)

Le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse G et le deuxième terme est l'énergie cinétique relative du mouvement de rotation propre pour un axe de rotation quelconque.

- **Vitesse angulaire** : orientée selon l'axe principal d'inertie Ge_i

(12.40)

- **Energie cinétique** : axe de rotation fixe selon l'axe principal d'inertie Ge_i

(12.41)

au carré de la vitesse angulaire, les omégagies carré. D'accord ? Alors, maintenant, on a quasiment la formule qu'on veut,

notes

résumé

- Energie cinétique relative : (13.34) dans (13.33)

$$\mathcal{T}' = \frac{1}{2} \overline{\mathcal{L}_G} \cdot \overline{\mathcal{R}} \quad (13.35)$$

- Energie cinétique : où $P = M V_G$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} M \overline{V_G}^2 + \mathcal{T}' = \frac{1}{2} \overline{P} \cdot \overline{V_G} + \frac{1}{2} \overline{\mathcal{L}_G} \cdot \overline{\mathcal{R}} \quad (13.36)$$

- Moment cinétique : repère d'inertie ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

$$L_G = \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{e}_j \quad (12.51)$$

- Vitesse angulaire : repère d'inertie ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{e}_i \quad (12.43)$$

- Energie cinétique relative : où $\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = \delta_{ji}$ donne (13.37)

$$\mathcal{T}' = \frac{1}{2} \overline{\mathcal{L}_G} \cdot \overline{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{e}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j^2$$

Dr. Sylvain Bréchet

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

29 / 49

si on veut être très précis et tout exprimer dans le repère d'inertie, on peut prendre la vitesse du sans-domas, l'exprimer elle aussi en composante dans le repère d'inertie, qui sont les v_g, j , il faut aller vecteur unitaire les j , chapeaux, et donc le carré de la vitesse du sans-domas sera tout simplement la somme du carré de ces composantes exprimées dans ce repère d'inertie. Et donc, l'énergie cinétique totale, pour une rotation autour d'un axe quelconque, ça n'a pas besoin d'être un axe principal d'inertie. D'accord ? Ca sera une demi de la somme sur les composantes j , enfin, sur les indigis qui va repérer les composantes dans le repère d'inertie, du produit de la masse, fois le carré des composantes, donc, de la vitesse du sans-domas, plus une demi de la somme sur j égale un à trois, du produit des moments d'inertie, le long de ces axes principaux d'inertie fois les composantes du vecteur vitesse angulaire Ω élevé au carré. D'accord ? Donc, qu'est-ce qu'on voit ? On voit encore qu'en rotation, la description est plus riche qu'en translation, puisque si on prend le mouvement du sans-domas, on a la masse qui est la même pour un mouvement, quelle que soit la direction de celui-ci, alors que pour les mouvements de rotation, il faudra regarder autour de quel axe. On est en train de décrire la rotation autour de quel axe principal d'inertie. On peut évidemment avoir une combinaison de ceci. Oui ? Il n'y a pas un problème, dans le sens où vous trouvez notre déprime, on avait supposé que le comédien était le nom de la masse principale de rotation et que l'heure n'était pas la même ? Alors, on n'a pas fait cette supposition. On a simplement exprimé Ω dans le repère d'inertie. Donc, on peut prendre un Ω quelconque qui va avoir trois composantes différentes selon les trois axes principaux d'inertie. D'accord

notes

résumé

55m 19s



- Energie cinétique relative : (13.34) dans (13.33)

$$T' = \frac{1}{2} \bar{L}_G \cdot \bar{\Omega} \quad (13.35)$$

- Energie cinétique : où $P = M V_G$

$$T = \frac{1}{2} M \bar{V}_G^2 + T' = \frac{1}{2} \bar{P} \cdot \bar{V}_G + \frac{1}{2} \bar{L}_G \cdot \bar{\Omega} \quad (13.36)$$

- Moment cinétique : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$L_G = \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{e}_j \quad (12.51)$$

- Vitesse angulaire : repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{e}_i \quad (12.43)$$

- Energie cinétique relative : où $\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = \delta_{ji}$ donne (13.37)

$$T' = \frac{1}{2} \bar{L}_G \cdot \bar{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j \hat{e}_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{e}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{G,j} \Omega_j^2$$

? C'est complètement général, pour l'instant. Mais vous posez une bonne question. Voilà, formule des déprimes avant la pose. Alors, pour la formule des déprimes avant la pose, si on revient en arrière,

notes

résumé

- **Vitesse** : centre de masse dans le repère d'inertie $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\vec{V}_G = \sum_{j=1}^3 v_{Gj} \hat{e}_j \quad \text{ainsi} \quad \vec{V}_G^2 = \sum_{j=1}^3 v_{Gj}^2 \quad (13.38)$$

- **Energie cinétique** : axe de rotation quelconque

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 M v_{Gj}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_{Gj} \Omega_j^2 \quad (12.39)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse G et le deuxième terme est l'énergie cinétique relative du mouvement de rotation propre pour un axe de rotation quelconque.

- **Vitesse angulaire** : orientée selon l'axe principal d'inertie Ge_i

(12.40)

- **Energie cinétique** : axe de rotation fixe selon l'axe principal d'inertie Ge_i

(12.41)

si vous regardez le déprime avant la pose, on n'a rien spécifié de particulier sur Omega. D'accord ? C'est venu après. On avait un Omega général. Là, on a commencé à dire quelque chose de spécifique sur Omega. C'est au niveau de la relation qui est ici. On l'a simplement exprimé dans le repère d'inertie. Donc, il y a trois composantes quelconques. C'est toujours vrai. Quel que soit le vecteur vitesse angulaire Omega que vous allez prendre.

notes

résumé

57m 25s



- Dérivée temporelle : énergie cinétique

$$\dot{T} = \sum F^{\text{ext}} \cdot V_G + \sum M_G^{\text{ext}} \cdot \Omega \quad (13.46)$$

- Identité des vitesses :

$$V_G = v_\alpha - \Omega \times GP_\alpha = v_\alpha - \Omega \times r'_\alpha \quad (13.31)$$

- Moment de force extérieure : F_α^{ext} exercée sur P_α

$$(13.47)$$

- Puissance : (13.31) et (13.47) dans (13.46)

$$(13.48)$$

- Identité vectorielle : (1.41)

$$(13.49)$$

Mais en revanche, la considération que vous êtes en train de mentionner, le fait qu'on pourrait avoir un axe principal d'inertie, c'est justement ce qu'on va discuter maintenant, puisque souvent, dans la pratique, c'est ce qui se passe. Souvent, on a un mouvement de rotation qui se fait uniquement autour d'un axe principal d'inertie. Alors, lorsque ceci est le cas, l'énergie séétique va se simplifier. Donc, prenons comme axe principal d'inertie, l'axe GEI. D'accord ? À ce moment-là, si on prend le vecteur vitesse angulaire Ω , donc on a une rotation autour de cette axe, la formule générale, c'est la somme sur J égale 1 à 3, des $\Omega E J$ chapeaux, seulement voilà, les ΩJ , pardon, le J chapeau. Seulement voilà, la rotation se fait seulement autour d'un axe principal d'inertie, quel axe GEI. Donc, on va avoir une seule composante non nulle pour Ω , qui est la J_m , qui sera simplement la norme de Ω , fois $E I$ chapeau. Donc, concrètement, ça revient à dire que si on prend la J_m composante de Ω , c'est Ω , fois le symbole de chronique R , Delta $E J$. Ok ? Voilà, et quand c'est le cas, on peut alors écrire que l'énergie séétique, autour, pour un mouvement de rotation propre, autour d'un axe principal d'inertie, qui est l'axe GEI, s'écrit comme une demi de la masse fois la vitesse du sang de masse au carré, plus une demi, du seul moment de la diversité qui va intervenir, celui au niveau de l'axe de rotation, qui est GEI, multiplié par le carré de la vitesse angulaire. Ah oui, merci. Il est en train de tourner, là. T'en peux encore ? Tu l'entends, mets-tu la lume, et puis il faut attendre une minute. Ah oui, d'accord. Merci beaucoup, Pierre. Alors, ça, c'est une mallette, c'est la mallette de James Bond. C'est une mallette assez spéciale, qui a un comportement en rotation, qui rend nous particulier.

notes

résumé

57m 49s



- Dérivée temporelle : énergie cinétique

$$\dot{T} = \sum F^{\text{ext}} \cdot V_G + \sum M_G^{\text{ext}} \cdot \Omega \quad (13.46)$$

- Identité des vitesses :

$$V_G = v_\alpha - \Omega \times GP_\alpha = v_\alpha - \Omega \times r'_\alpha \quad (13.31)$$

- Moment de force extérieure : F_α^{ext} exercée sur P_α

$$(13.47)$$

- Puissance : (13.31) et (13.47) dans (13.46)

$$(13.48)$$

- Identité vectorielle : (1.41)

$$(13.49)$$

D'accord ? On en parlera dans quelques instants. Bon, on a encore quelque chose à faire au niveau calculatoire. On doit déterminer le théorème de l'énergie cinétique. Pour vous épargner les trois pages de calcul, et arriver en fait au même résultat, on va directement aller à la page 25.

notes

résumé

- **Axes principaux d'inertie** : Ge_1 , Ge_2 et Ge_3 sont immobiles par rapport au référentiel de la roue en rotation. Ils tournent avec la roue comme des rayons.
- **Vecteur vitesse angulaire** : constant selon l'axe de rotation fixe mais pas selon les axes principaux d'inertie mobiles. Initialement, à $t = 0$, l'axe Ge_1 est horizontal. L'angle θ est constant.

① selon $\hat{e}_1$:

② selon $\hat{e}_2$:

③ selon $\hat{e}_3$:

(13.55)

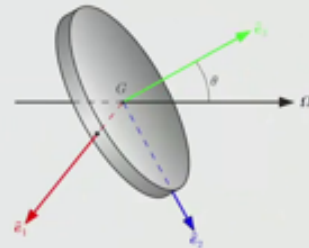
- **Dérivée temporelle** : vecteur vitesse angulaire

① selon $\hat{e}_1$:

② selon $\hat{e}_2$:

③ selon $\hat{e}_3$:

(13.56)



Et alors, je vais rappeler ici rapidement la formule générale de l'énergie cinétique d'un solide indéformable. C'est la somme sur les points matériels de 1,5 du produit de leur masse fois le carré de leur vitesse. D'accord ? Nous, ce qu'on aimerait établir, c'est le théorème de l'énergie cinétique. Pour le solide indéformable, il faudra donc faire varier l'énergie cinétique. Une bonne idée serait de calculer la dérivée. D'accord ? Commençons par écrire la dérivée d'énergie cinétique totale. D'accord ? Lorsqu'on dérive le V_α au carré, il y a un facteur 2 qui vient multiplier le 1,5, et il va nous rester de produit scalaire de V_α avec sa dérivée temporelle. On aura donc la somme sur alpha, de M_α qui multiplie V_α fois sa dérivée temporelle. Qu'on va d'ailleurs pouvoir récrire, compte tenu du fait que la quantité de mouvement du point matériel alpha, c'est $M_\alpha V_\alpha$, on a ici sa dérivée temporelle. On aura donc une demi de la somme sur alpha, du produit scalaire, de la dérivée temporelle, de la quantité de mouvement du point matériel alpha fois sa vitesse. Et puis, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement du point matériel alpha, c'est la force extérieure exercée sur ce point matériel alpha. Ceci sera donc la somme sur les points matériels, des forces extérieures exercées sur ces points matériels, multipliées par le vecteur V_α . Il y a un produit scalaire. Nous, ce qu'on veut, c'est la variation de l'énergie cinétique. C'est en termes de cette variation d'énergie cinétique totale du solide indéformable qui est exprimée le théorème d'énergie cinétique. Donc, on va prendre la dérivée temporelle et on va la multiplier par l'intervalle de temps infinitésimal. Ce faisant, on retrouve la variation infinitésimal d'énergie cinétique qui est d'été. D'accord ? Alors, ce qui va apparaître, c'est le produit scalaire de V_α avec d'été, qui est le déplacement infinitésimal. On va avoir donc la somme du

notes

résumé

59m 59s



- **Axes principaux d'inertie** : Ge_1 , Ge_2 et Ge_3 sont immobiles par rapport au référentiel de la roue en rotation. Ils tournent avec la roue comme des rayons.
- **Vecteur vitesse angulaire** : constant selon l'axe de rotation fixe mais pas selon les axes principaux d'inertie mobiles. Initialement, à $t = 0$, l'axe Ge_1 est horizontal. L'angle θ est constant.

① selon $\hat{e}_1$:

② selon $\hat{e}_2$:

③ selon $\hat{e}_3$:

(13.55)

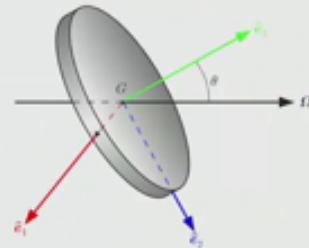
- **Dérivée temporelle** : vecteur vitesse angulaire

① selon $\hat{e}_1$:

② selon $\hat{e}_2$:

③ selon $\hat{e}_3$:

(13.56)



notes

résumé

- **Axes principaux d'inertie** : Ge_1 , Ge_2 et Ge_3 sont immobiles par rapport au référentiel de la roue en rotation. Ils tournent avec la roue comme des rayons.
- **Vecteur vitesse angulaire** : constant selon l'axe de rotation fixe mais pas selon les axes principaux d'inertie mobiles. Initialement, à $t = 0$, l'axe Ge_1 est horizontal. L'angle θ est constant.

① selon $\hat{e}_1$:

② selon $\hat{e}_2$:

③ selon $\hat{e}_3$:

(13.55)

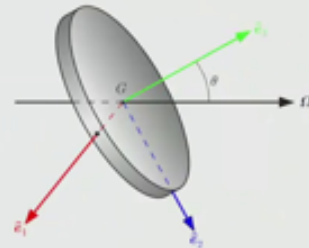
- **Dérivée temporelle** : vecteur vitesse angulaire

① selon $\hat{e}_1$:

② selon $\hat{e}_2$:

③ selon $\hat{e}_3$:

(13.56)



2, et on trouve alors que la variation d'énergie sciétique de 1 à 2, c'est la somme sur l'ensemble des points matériels qui appartiennent au solide indéformable, des travaux qui sont effectués par les forces extérieures exercées sur ces points matériels, d'accord ? C'est donc la somme sur les points matériels du travail qui va être effectué par chacune des forces extérieures sur chaque point matériel, qui est le produit scalaire de la force, fois de déplacement, long du chemin suivi. Dans la pratique, il y a des points stratégiques. Il y a le centre de masse, il y a des points de contact, et ainsi de suite sur lesquels s'exercent les forces. Donc, il faut calculer les travaux de l'ensemble de ces forces qui sont effectués sur le solide indéformable pour trouver la variation de son énergie sciétique. S'il vous plaît, mettez un petit signe. Attention. L'énergie sciétique dont on parle ici, c'est l'énergie sciétique totale. C'est-à-dire que c'est la somme de l'énergie sciétique du centre de masse, et également de l'énergie sciétique de rotation. D'accord ? Faut tenir compte de tout. Je dis ça parce que en examen, j'ai déjà eu des surprises où des étudiants avaient tenu compte de l'énergie sciétique du centre de masse, puisque on l'avait vu au chapitre 6 avec la première version du théorème du centre de masse. Il faut encore tenir compte de l'énergie sciétique totale. Donc ici, on va peut-être ajouter un petit mot en majuscule. C'est l'énergie sciétique totale qu'il faut prendre en compte. D'accord ? Voilà. Alors, passons à quelque chose d'amusant. Qui n'est pas évident au niveau calculatoire, mais qui est amusant au niveau pratique.

notes

résumé

- **Vitesse angulaire : repère d'inertie** ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

- ① selon $\hat{e}_1$: $\Omega_1 = \Omega \sin \theta \sin(\Omega t)$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\Omega_2 = \Omega \sin \theta \cos(\Omega t)$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\Omega_3 = \Omega \cos \theta$

(13.55)

- **Accélération angulaire : repère d'inertie** ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

- ① selon $\hat{e}_1$: $\dot{\Omega}_1 = \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t)$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\dot{\Omega}_2 = -\Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t)$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\dot{\Omega}_3 = 0$

(13.56)

- **Equations d'Euler : générales**

- ① selon $\hat{e}_1$: $\sum M_{G,1}^{\text{ext}} = I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\sum M_{G,2}^{\text{ext}} = I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\sum M_{G,3}^{\text{ext}} = I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1$

(12.60)

- **Moments d'inertie : roue (cylindre)**

(13.57)

C'est le cas d'une roue mal équilibrée. Donc... J'ai ici une roue de vélo. Je peux la faire tourner autour de son axe de symétrie. Là, elle est bien équilibrée. Si elle tourne pas autour d'axe de symétrie, je fais ça. D'accord ? Et il y a des secousses qui apparaissent. Si on est sur le vélo, on les ressent clairement. Si la roue est un peu voilée, on le sent assez facilement. On aimerait donc décrire la dynamique d'une roue voilée. C'est salidé. Donc, qu'est-ce qu'on va faire ? Par rapport à l'axe de rotation, on va prendre notre roue et on va légèrement la décaler. Donc, la roue ne va plus tourner par rapport à l'axe de rotation. C'est-à-dire que si l'axe de rotation est horizontal, par exemple, l'axe de la roue aura un mouvement de précession autour de l'axe horizontal avec un angle constant. C'est angle, on va l'appeler l'angle theta. En plus du mouvement de précession, il y a un mouvement de rotation propre, ce qui donne ça. D'accord ? Et alors, si vous essayez à la pause de prendre la roue, de la faire tourner comme ceci assez rapidement, et puis vous faites ça avec vos bras, vous allez vraiment sentir les moments de force. Des moments de force, en fait, qui, on va le voir, vont tourner dans le plan de la roue. D'accord ? Et c'est ça qu'on aimerait montrer par le calcul, maintenant. D'accord ? Alors, on prend notre roue de vélo, on la caractérise par un cylindre, d'accord ? On va prendre, comme axe principal d'inertie, le long de l'axe de la roue, l'axe GE3, donc on place le troisième vecteur unitaire, le long de l'axe, d'accord ? Et puis, on va placer les deux autres vecteurs unitaires dans le plan de la roue. Il faut imaginer qu'ils sont orientés selon des rayons. Donc, ils vont tourner avec la roue, d'accord

notes

résumé

65m 58s



- **Vitesse angulaire : repère d'inertie** ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

- ① selon $\hat{e}_1$: $\Omega_1 = \Omega \sin \theta \sin(\Omega t)$
 - ② selon $\hat{e}_2$: $\Omega_2 = \Omega \sin \theta \cos(\Omega t)$
 - ③ selon $\hat{e}_3$: $\Omega_3 = \Omega \cos \theta$
- (13.55)

- **Accélération angulaire : repère d'inertie** ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

- ① selon $\hat{e}_1$: $\dot{\Omega}_1 = \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t)$
 - ② selon $\hat{e}_2$: $\dot{\Omega}_2 = -\Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t)$
 - ③ selon $\hat{e}_3$: $\dot{\Omega}_3 = 0$
- (13.56)

- **Equations d'Euler : générales**

- ① selon $\hat{e}_1$: $\sum M_{G,1}^{\text{ext}} = I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2$
 - ② selon $\hat{e}_2$: $\sum M_{G,2}^{\text{ext}} = I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3$
 - ③ selon $\hat{e}_3$: $\sum M_{G,3}^{\text{ext}} = I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1$
- (12.60)

- **Moments d'inertie : roue (cylindre)**

(13.57)

? Alors, par rapport au dessin que vous avez ici... OK. Il faut imaginer que la roue tourne, donc, de profil comme ça, dans le sens trigonométrique. Donc, vous voyez ici, vous avez la chambre à air avec le petit bouchon, la valve. On va faire tourner la valve pour la faire descendre. C'est comme ça que ça tourne d'abord. Ça nous permettra de comprendre comment on peut paramétriser cette rotation. Donc, ce qu'on va faire, c'est prendre le vecteur vitesse angulaire qui est, selon l'axe horizontal, et le projeter dans le repère d'inertie, d'accord ? On va projeter la composante selon le troisième axe. Donc, on va projeter le vecteur vitesse angulaire et obtenir la composante selon l'axe de symétrie, qui est ω_3 . Alors, ça, c'est assez facile à faire. On prend ω qui est orienté comme ceci. Et on le projette, selon le troisième axe. On va projeter sur le cas d'état de jaca. On aura $\omega \cos \theta$. Si on projette maintenant, non pas sur le cas d'état de jaca, mais qu'on projette ω dans le plan vertical de la roue, d'accord ? Qui contient... Oui, dans le plan vertical de la roue. Ce n'est pas le cosinus qui va paraître. Ça sera le sinus. Donc, pour nos deux autres composantes, ω_1 et ω_2 , on va se retrouver avec $\omega \sin \theta$ 2 fois. OK ? Et maintenant, attention. Autant t égale 0, le vecteur E_1 chapeau, le rayon, est horizontal. D'accord ? Celui-ci est horizontal, alors que E_2 est vertical. Donc, par rapport au plan horizontal, par rapport à l'axe horizontal qui correspond à ω , d'accord ? On va avoir une projection non nulle pour ω_2 , initialement, et une projection nulle pour ω_1 . On va donc avoir un sinus pour ω_1 , un sinus de ωt , et pour ω_2 , on aura un cosinus de ωt . D'accord ? Et

notes

résumé

- **Vitesse angulaire : repère d'inertie** ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

- ① selon $\hat{e}_1$: $\Omega_1 = \Omega \sin \theta \sin(\Omega t)$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\Omega_2 = \Omega \sin \theta \cos(\Omega t)$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\Omega_3 = \Omega \cos \theta$

(13.55)

- **Accélération angulaire : repère d'inertie** ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$)

- ① selon $\hat{e}_1$: $\dot{\Omega}_1 = \Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t)$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\dot{\Omega}_2 = -\Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t)$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\dot{\Omega}_3 = 0$

(13.56)

- **Equations d'Euler : générales**

- ① selon $\hat{e}_1$: $\sum M_{G,1}^{\text{ext}} = I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2$
- ② selon $\hat{e}_2$: $\sum M_{G,2}^{\text{ext}} = I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3$
- ③ selon $\hat{e}_3$: $\sum M_{G,3}^{\text{ext}} = I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1$

(12.60)

- **Moments d'inertie : roue (cylindre)**

(13.57)

puis, maintenant, on aura besoin des dérivés temporels des composantes d'avitité sangulaire pour pouvoir appliquer directement les équations de l'air. On va les calculer rapidement. Omega 1. Omega 2. Et omega 3. On va les obtenir. En dérivant par rapport au temps les termes qui sont ici, clairement, il n'y a aucune dépendance du troisième terme, ça donne zéro. Pour les deux premiers, ce qu'on va dériver par rapport au temps, c'est le sinus et le cosinus de omega t. Ce qui, en évidence, va nous amener un omega, on aura un omega carré. D'accord ? On l'a dérivé du sinus. Du sinus 8, c'est le cosinus. On aura donc un omega carré sinus theta cosinus de omega t. Et puis, la dérivé du cosinus, c'est moins le sinus. La dérivé interne qui est un omega, on aura un moins omega carré sinus de theta fois le sinus de omega t. D'accord ? Voilà, donc on a fait une partie du travail. On a donc les composants de omega,

notes

résumé

- Equations d'Euler : roue mal équilibrée (13.58)

- selon $\hat{e}_1$:

- selon $\hat{e}_2$:

- selon $\hat{e}_3$:

- Somme des moments de forces extérieures : sur la roue (13.59)

La somme des moments de forces extérieures M_G^{ext} exercés sur la roue est périodique ce qui génère des secousses (roue mal équilibrée). Pour une roue bien équilibrée, le vecteur vitesse angulaire Ω est orienté selon l'axe de symétrie Ge_3 de la roue, i.e. $\theta = 0$, et ainsi $\sum M_G^{\text{ext}} = 0$.

les composants de omega points, d'accord ? Et c'est celle qui intervienne dans les équations générales de l'air qu'on a déterminé ensemble la semaine passée. C'est pas encore tout à fait terminé, puisque si on prend une roue de vélo, on a un moment d'inertie, je vais l'inquiner toujours comme ça, voilà, on a un moment d'inertie par rapport à l'axe principal d'inertie, à l'axe de symétrie de la roue qu'on appelait IG parallèle. D'accord ? Donc pour nous, IG3, c'est IG parallèle. Par rapport à cet axe-là, par rapport aux deux autres axes, dans le plan d'arrou par symétrie, on a les mêmes moments d'inertie, ce seront des IG perpendiculaires, perpendiculaires à l'axe de symétrie. Donc IG1 ainsi que IG2 sont égaux et ils sont égales à IG perpendiculaires. On pourrait donner une valeur explicite au moment d'inertie, on pourrait imaginer que toute la masse se trouve à l'extérieur, auquel cas on a un cylindre creux. Quelle est répartie de manière homogène ? C'est pas tellement vrai, ça serait un cylindre plein. Ou alors qu'on a quelque chose qui se trouve entre ces deux extrêmes, on aurait donc un moment d'inertie qui est de la forme lambda-phoimer-carré ou lambda-vari entre 1,001. D'accord ? Là, on les laisse simplement écrits comme des moments d'inertie de IG parallèles, IG perpendiculaires, sans rentrer dans plus de détails. D'accord ? En revanche, ce qu'on va faire maintenant,

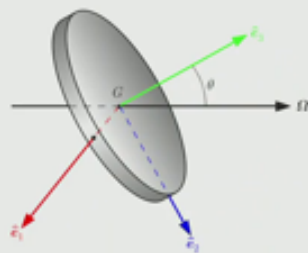
notes

résumé

71m 1s



- **Moment de force extérieure** : la somme des moments de forces extérieures M_G^{ext} exercés sur la roue est périodique ce qui génère des secousses (roue mal équilibrée). Pour une roue bien équilibrée, le vecteur vitesse angulaire Ω est orienté selon l'axe de symétrie Ge_3 de la roue, i.e. $\theta = 0$, et ainsi $\sum M_G^{\text{ext}} = 0$.
- **Equilibrage de roue** : l'équilibrage d'une roue de voiture se fait en mesurant la somme des moments de force $-\sum M_G^{\text{ext}}$ exercés par la roue en rotation sur l'axe. En ajoutant des masses au bon endroit sur la jante, on annule ce moment de force extérieure résultant.



c'est qu'on va prendre des équations de l'air qu'on trouve ici et substituer les composants de omega, les accélérations du l'air, et on va également utiliser les moments d'inertie liés à la symétrie de notre roue cylindrique. D'accord ? Et alors, pour la première équation, on aura la somme des moments de force extérieures selon le premier axe principal d'inertie, qui est le moment d'inertie perpendiculaire, selon cet axe, d'ailleurs, fois omega-quare, sinus-teta, cosinus de omega-t. D'accord ? Puis ensuite, on a la contribution, disons, qui est liée au mouvement de précession de LG autour de omega, qui va être la différence entre le moment d'inertie parallèle et le moment d'inertie perpendiculaire, multiplié par omega-quare, cosinus-teta, sinus-teta, fois cosinus de omega-t. On a une expression qui va ressembler pour le deuxième axe, pour des raisons de symétrie, c'est assez logique quelque part. On aura la somme des moments de force extérieures évalués par rapport au centre de masse, le long du deuxième axe principal d'inertie, qui va être ici, c'est l'inertie le moins, qui est l'opposé du moment d'inertie, selon cet axe, fois un omega-quare, sinus-teta, mais attention, maintenant, c'est un sinus de omega-t. D'accord ? Et comme deuxième terme, on a la contribution liée aux mouvements de précession de Lg autour de omega, qui est la différence entre le moment d'inertie, selon un axe perpendiculaire, le moment d'inertie selon un axe parallèle, d'accord ? Faut un omega-quare, fois le cosinus de teta, fois le sinus de teta, et maintenant, c'est le sinus de omega-t. En ce qui concerne maintenant la somme des moments de force extérieures, évalué par rapport à l'axe de symétrie de la roue, il est nul, pourquoi ? Il est nul parce que omega-point, si vous prenez la troisième équation, vous avez un omega-3-point, omega-3-point est nul puisque omega-3 est constant. Si vous prenez la différence entre le moment d'inertie, on est dans le plan de

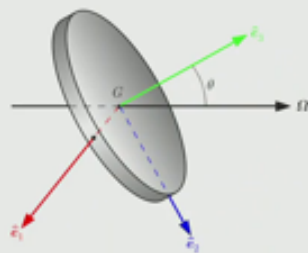
notes

résumé

72m 30s



- **Moment de force extérieure** : la somme des moments de forces extérieures M_G^{ext} exercés sur la roue est périodique ce qui génère des secousses (roue mal équilibrée). Pour une roue bien équilibrée, le vecteur vitesse angulaire Ω est orienté selon l'axe de symétrie $G e_3$ de la roue, i.e. $\theta = 0$, et ainsi $\sum M_G^{\text{ext}} = 0$.
- **Equilibrage de roue** : l'équilibrage d'une roue de voiture se fait en mesurant la somme des moments de force $-\sum M_G^{\text{ext}}$ exercés par la roue en rotation sur l'axe. En ajoutant des masses au bon endroit sur la jante, on annule ce moment de force extérieure résultant.

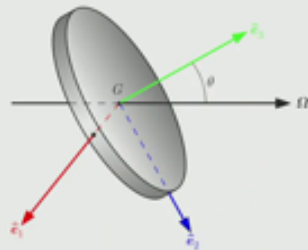


la roue, on a les mêmes moments d'inertie, I_{G2} , égal, I_{G1} , égal, I_{G3} perpendiculaire, donc ce terme l'a disparaît. Donc, on a deux composantes non-nul, pour le moment de force, d'accord ? Ces composantes sont dans le plan d'arbre. Donc, la somme des moments de force extérieures, évalué par rapport à G , on va pouvoir l'écrire de la manière suivante. C'est I_{G3} perpendiculaire, moins la différence entre I_{G3} parallèle et I_{G3} perpendiculaire, qui multiplie le cosinus de teta, fois $\Omega - t$, cosinus de $\Omega - t$, fois eu un chapeau. Et on a une deuxième contribution, on va mettre un signe moins. C'est moins I_{G3} perpendiculaire, moins I_{G3} parallèle, moins I_{G3} perpendiculaire, qui multiplie le cosinus de teta. Donc, voyez que ce pré-facteur est le même. On a ensuite un $\Omega - t$, et maintenant, c'est un sinus de $\Omega - t$, fois eu de chapeau. Voilà la forme générale du moment de force extérieur. Volontairement, on l'a écrit de manière un peu compliquée, en prenant des vecteurs unitaires qui sont associés au rayon de la roue, qui tournent avec la roue, qui sont donc immobiles par rapport à la roue. Alors, qu'est-ce qu'on voit ? On voit qu'en prenant ces vecteurs-là, le vecteur moment de force tourne dans le plan de la roue. Donc, il y a des secousses qui vont se faire sentir. On a une variation périodique, on a un cosinus et un sinus de $\Omega - t$ qui apparaissent. On voit aussi, et c'est là le point intéressant, que pour nos deux composantes, il y a un sinus de teta qui apparaît. Theta, c'est l'angle que fait l'axe de symétrie de la roue avec l'axe de rotation. Ça veut dire quoi ? Ça veut dire que si teta tend vers 0, le sinus de teta tend vers 0, la somme des moments de force tend vers 0, donc si votre roue est bien équilibrée, il n'y a plus de moments de force. En revanche, je

notes

résumé

- **Moment de force extérieure** : la somme des moments de forces extérieures M_G^{ext} exercés sur la roue est périodique ce qui génère des secousses (roue mal équilibrée). Pour une roue bien équilibrée, le vecteur vitesse angulaire Ω est orienté selon l'axe de symétrie Ge_3 de la roue, i.e. $\theta = 0$, et ainsi $\sum M_G^{\text{ext}} = 0$.
- **Equilibrage de roue** : l'équilibrage d'une roue de voiture se fait en mesurant la somme des moments de force $-\sum M_G^{\text{ext}}$ exercés par la roue en rotation sur l'axe. En ajoutant des masses au bon endroit sur la jante, on annule ce moment de force extérieure résultant.



ne l'ai pas. Il y en a un qui apparaît, qui varie de manière périodique. C'est ce que vous pouvez voir en regardant la roue qui tourne de manière un peu frénétique. C'est que vous avez un moment de force qui tourne de manière périodique dans le plan. Alors, si vous prenez une roue de voiture maintenant,

notes

résumé

et effets gyroscopiques

EPFL

gyroscopie et effets gyroscopiques

Effets gyroscopiques

Roue de vélo

Toupie

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

30 / 49

13.3 Gyroscopie

- Gyroscopie : ... maintient dans ... d'inertie. Lorsq ... modifiée par la



- Histoire : le g ... alternative au ... terre ; "gyrosc
- Aéronautique ... aéronautique p

Dr. Sylvain Bréchet

que va faire un garagiste ? Le garagiste, il prend la roue et puis il la monte sur un axe. Et avec cet axe, il fait tourner la roue autour de l'axe. Si la roue est bien équilibrée, il n'y a aucun moment de force qui est détectée par le dispositif qui est accroché à la roue. En revanche, si elle est légèrement mal équilibrée, elle va tourner autour d'un axe qui n'est pas l'axe sur lequel... Enfin, disons. L'axe de symétrie d'arrou ne va pas correspondre à l'axe sur laquelle elle est montée. Il y aura des moments de force périodique qui vont apparaître. Ils vont être détectés par le dispositif qui est là. Et donc, le garagiste va laisser la roue pour qu'ensuite, elle tourne vraiment bien selon l'axe, selon son axe de symétrie, comme elle avait été conçue au départ. Vous pouvez d'ailleurs repérer sur la route les gens qui, en général, changent leur roue eux-mêmes, parce que souvent, ils le font mal. Et vous voyez que vous avez des roues qui sont légèrement voilées. Alors, quand l'amplitude est petite, ce n'est pas très grave. En revanche, si l'amplitude est plus grande, ça peut être très dangereux. C'est pour ça que, quand vous changez les roues, il faut savoir ce que vous faites, sinon, c'est mieux de laisser faire des professionnels. Oui ? ... Alors, dans la pratique, là, je l'ai fait en agitant un peu là-haut. Dans la pratique, si vous voulez, ce mouvement va être régulier. Moi, j'ai donné des petits accous. Donc, effectivement, ce que j'ai fait était un peu chaotique. Dans la pratique, si vous prenez cette roue et qu'elle ne tourne pas autour de son axe principal inercis, vous allez avoir une précession très régulière. D'accord ? Et donc, vous allez avoir vraiment un moment de force qui est périodique, tout à fait, qui est dans le plan. Pour le voir, on

notes

résumé

77m 7s



Gyroscope et effets gyroscopiques

Effets gyroscopiques

Roue de vélo

Toupie

- **Gyroscope** : maintient dans d'inertie. Lorsque modifiée par la



- **Histoire** : le g alternative au terre ; "gyrosc
- **Aéronautique** : aéronautique p

a été obligé, donc, de prendre un repère d'inertie qui est fixé sur le plan de la roue. Donc, c'est comme si on avait peint des rayons, d'accord, en couleur. On a un chapeau, un e_2 chapeau et un e_3 chapeau, d'accord ? Dans la pratique, quand on fait des calculs, et c'est ce qu'on va faire dans le temps qui nous reste, on va prendre un repère d'inertie qui est attaché à la roue, mais qui ne tourne pas avec la roue. L'avantage, c'est que ça va être plus simple à modéliser et plus simple à calculer. Donc, typiquement, si on a une roue de vélo qui fait un virage, et c'est ce qu'on va faire dans quelques instants, on va prendre un vecteur unitaire, e_1 chapeau, qui reste horizontal, e_2 chapeau est orthogonal dans le plan de la roue, et e_3 chapeau sera orienté selon l'axe de l'arbre, d'accord ?

notes

résumé

- **Effets gyroscopiques** : par analogie avec le gyroscope, on parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un disque ou d'une roue dont la rotation autour d'un axe a pour effet de résister aux changements de son orientation. Ces effets sont liés à la conservation du moment cinétique.



- **Conservation du moment cinétique** : composante verticale : $L_z = 0$

- 1 **Etat initial** : la roue tourne dans un plan vertical selon un axe horizontal.
- 2 **Etat final** : la roue tourne dans le sens trigonométrique selon l'axe vertical et l'étudiant avec le tabouret tournent dans le sens opposé. Leurs moments cinétiques se compensent.

Dr. Sylvain Bréchet

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

32 / 49

Alors, c'est ce qui nous attend maintenant. Après, une petite discussion ou une courte introduction, disons, au gyroscope. Alors, il faut juste que j'allume la valise, la valise spéciale. Alors, elle va faire un peu de bruit. Il faut attendre une minute qu'elle s'allume correctement. Ah oui, on va commencer par cet exemple-là. Qu'est-ce que c'est qu'un gyroscope ? Dans le mot gyroscope, il y a deux mots. Il y a le mot gyro qui veut dire rotation et scope, qui est un instrument pour la visualiser. D'accord ? Un gyroscope, c'est une roue ou un disque qui est en rotation. Et le fait que la roue ou le disque soit en rotation veut dire que l'axe de rotation va se maintenir constant. Donc, si je prends cette table, vous voyez que je la fais tourner n'importe comment, voilà, dans un sens comme dans un autre, qu'est-ce que vous voyez ? L'axe reste constant, parce que la roue tourne. Et donc, l'axe de rotation va se stabiliser derrière ceci. Il y a la conservation du moment cinétique. Alors, typiquement, si maintenant, vous voulez changer l'axe de rotation, ça va être compliqué. Alors, il y a-t-il quelqu'un dans la salle qui est costaud, qui a envie de s'amuser et qui veut porter une mallette ? Il n'y a pas d'explosif dedans, il n'y a aucun danger. Il y a-t-il un ou une volontaire ? Vous voulez venir ? Quand vous transportez cette valise comme ça, tout se passe bien. En revanche, quand vous voulez essayer de la tourner, c'est plus compliqué. Allez-y. Vous prenez la valise, vous marchez avec. Et maintenant, vous essayez d'incliner la valise, la tourner. C'est compliqué, hein. Pourquoi ? Pourquoi ? Parce qu'il y a un gyroscope dans la valise. D'accord ? Qui s'oppose donc au changement de son orientation. OK ? Elle est bizarre, hein. C'est incroyable, hein. Alors, ça, c'est justement un effet gyroscopique. C'est

notes

résumé

79m 35s



- **Effets gyroscopiques** : par analogie avec le gyroscope, on parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un disque ou d'une roue dont la rotation autour d'un axe a pour effet de résister aux changements de son orientation. Ces effets sont liés à la conservation du moment cinétique.



- **Conservation du moment cinétique** : composante verticale : $L_z = 0$

- 1 **Etat initial** : la roue tourne dans un plan vertical selon un axe horizontal.
- 2 **Etat final** : la roue tourne dans le sens trigonométrique selon l'axe vertical et l'étudiant avec le tabouret tournent dans le sens opposé. Leurs moments cinétiques se compensent.

Dr. Sylvain Bréchet

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

32 / 49

ce qu'on veut décrire plus tard. C'est ce qui se passe avec votre vélo. C'est pour ça que votre vélo est stable. D'accord ? Quand vous essayez de l'incliner, il bascule pas parce que les roues tournent vite. Là, c'est pareil. Il y a une roue qui tourne vite. On peut essayer de l'incliner. On n'arrive pas à le faire. Parce que l'axe du gyroscope reste constant dans le temps. D'accord ? Alors, cette magnifique valise, elle a été bricolée. Attends, attends, tu peux là. On va essayer de la... Ah, tu veux que je te mette en rotation ce cabouret ? OK, d'accord. Ah oui, tu peux l'incliner. Oui, oui, bien sûr. Vous avez le concepteur de la valise sensationnelle. Voilà. Merci Pierre. Applaudissements Elle fait encore un peu de bruit. Et puis, c'était quoi votre prénom ? C'était quoi votre prénom ? Raphaël. Raphaël, il faut pas oublier de remercier encore Raphaël. Attendez. C'est bon, c'est bon. Oui, oui, tu peux l'étendre. Merci. Merci. C'est bon, c'est bon. Merci. C'est bon. Merci. Merci, y'a un. Super. Voilà. Donc, historiquement, le gyroscope, il a été inventé par Léon Foucault. Alors on va comprendre pourquoi. Léon Foucault avait une obsession, la rotation de la Terre. Il voulait démontrer, assez contemporain, que la Terre était bien sphère, en rotation autour de son axe. Alors sa première tentative, c'était le fameux pendule qui porte son nom. Pourtant, il y a quand même des idées inductibles qui n'en démordaient pas et pensaient que la Terre était plate. Donc il voulait trouver un autre moyen de les convaincre. Et donc il a conçu le gyroscope. Alors pourquoi le gyroscope montre que la Terre tourne ? Pour la raison suivante. Quand vous avez une roue ou un disque qui est mis en rotation, ce gyroscope garde son orientation au cours du temps. Par rapport à quoi ? Par rapport à un référentiel inertie. Alors si

notes

résumé

- **Effets gyroscopiques** : par analogie avec le gyroscope, on parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un disque ou d'une roue dont la rotation autour d'un axe a pour effet de résister aux changements de son orientation. Ces effets sont liés à la conservation du moment cinétique.



- **Conservation du moment cinétique** : composante verticale : $L_z = 0$

- 1 **Etat initial** : la roue tourne dans un plan vertical selon un axe horizontal.
- 2 **Etat final** : la roue tourne dans le sens trigonométrique selon l'axe vertical et l'étudiant avec le tabouret tournent dans le sens opposé. Leurs moments cinétiques se compensent.

Dr. Sylvain Bréchet

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

32 / 49

maintenant l'axe de rotation de la roue est différent de l'axe de rotation de la Terre, comme la Terre tourne à un mouvement de rotation, on va alors voir un mouvement de précession dans le sens opposé au sens de rotation de la Terre. De l'axe du gyroscope par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Et donc on va voir cet axe bouger au cours du temps. Alors évidemment qu'il faudra lancer le gyroscope très vite pour qu'il soit stable longtemps et qu'on puisse mettre en évidence cet effet. Alors ce gyroscope, je vous propose de le voir en action. C'est quelque chose d'assez spécial. Quand on va lancer le gyroscope, je vais enlever la masque qui est ici, ça c'est pour plus tard. On va lancer ce gyroscope avec la dramelle. Non, ce n'est pas une course de formulaire. Là, vous le voyez tourner. Alors maintenant je peux le prendre, il est monté sur deux cadrans. Vous voyez que les cadrans changent d'orientation, mais l'axe reste constant au cours du temps. Ces gyroscopes ont été utilisés dès les débuts de l'aéronautique et dans les avions de ligne, dans les Boeing, disons jusqu'aux années 70, ils étaient encore abondamment utilisés, ils ont été remplacés par des équivalents numériques aujourd'hui. Mais ils permettent de garder vraiment une orientation stable, fixe, au cours du temps. Alors il y a un truc incroyable qui se passe avec un gyroscope. Je vais prendre cet écran et je vais le suspendre au cadran interne. Qu'est-ce qu'on s'attendrait à voir ? On s'attendrait à ce que le cadran interne bascule. A cause du moment de force, lié au poids qu'on a suspendu. Et bien, pas du tout, il ne bascule pas, il se met à tourner. D'accord ? C'est incroyable. Alors maintenant, si je le place de l'autre côté, que va-t-il se passer ? Il tourne aussi, mais dans l'autre sens. D'accord ? C'est

notes

résumé

- **Effets gyroscopiques** : par analogie avec le gyroscope, on parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un disque ou d'une roue dont la rotation autour d'un axe a pour effet de résister aux changements de son orientation. Ces effets sont liés à la conservation du moment cinétique.



- **Conservation du moment cinétique** : composante verticale : $L_z = 0$

- 1 **Etat initial** : la roue tourne dans un plan vertical selon un axe horizontal.
- 2 **Etat final** : la roue tourne dans le sens trigonométrique selon l'axe vertical et l'étudiant avec le tabouret tournent dans le sens opposé. Leurs moments cinétiques se compensent.

Dr. Sylvain Bréchet

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

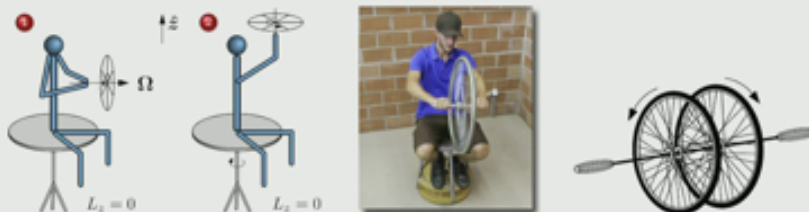
32 / 49

assez fou. Vous n'avez rien consommé d'illicite, vous n'êtes pas en train de rêver. C'est de la physique, c'est bien un effet qu'on peut expliquer. Et on va l'expliquer. D'accord ? Alors, je vais vous laisser admirer le gyroscope qui va évidemment ralentir au cours du temps. D'accord ? Faisons une petite expérience maintenant. Là, je vais avoir besoin d'un volontaire. Alors là, pour le coup, quelqu'un qui a de la force musculaire dans les bras. Y a-t-il un ou une volontaire ? Faut une certaine force. Oui ? Alors, venez de rejoindre. Je vais vous demander de prendre place sur le tabouret. Et ce qu'on va faire, c'est que je vais vous donner une roue en rotation. Derrière les effets gyroscopiques, ce qui se cache en réalité, c'est la conservation du moment scientifique. Prenez place. Rappelez-moi votre prénom. Ah oui, Mathieu. Vous avez un trou en rotation, et vous aurez d'abord l'axe en position horizontale. Comme elle va être en rotation, le moment scientifique va être orienté le long de l'axe de rotation. Ce qui veut dire que la composante verticale du moment scientifique sera nulle. Mais la somme des moments de force extérieures qui s'exercent sur Mathieu, au niveau de son sainte-de-masse, comme on l'a vu avec l'exemple des alters la semaine passée et la semaine d'avant, cette somme est nulle. Donc, le moment scientifique du système formé de Mathieu et du tabouret a une composante verticale qui sera initialement nulle pour le moment scientifique. Elle doit le rester. Si Mathieu prend la roue qui sera en rotation et qui l'incline comme ceci, la roue aura son axe de rotation qui devient vertical. Donc, il y a une composante non nulle du moment scientifique. Or, il faut que globalement, le moment scientifique soit nulle, donc Mathieu va tourner en sens opposé, avec un moment scientifique égal et opposé. C'est ça qu'on va voir ensemble maintenant. Donc... Je vais

notes

résumé

- **Effets gyroscopiques** : par analogie avec le gyroscope, on parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un disque ou d'une roue dont la rotation autour d'un axe a pour effet de résister aux changements de son orientation. Ces effets sont liés à la conservation du moment cinétique.



- **Conservation du moment cinétique** : composante verticale : $L_z = 0$

- ❶ **Etat initial** : la roue tourne dans un plan vertical selon un axe horizontal.
- ❷ **Etat final** : la roue tourne dans le sens trigonométrique selon l'axe vertical et l'étudiant avec le tabouret tournent dans le sens opposé. Leurs moments cinétiques se compensent.

la faire tourner au maximum de sa vitesse angulaire. possible avec le lanceur. Voilà, Mathieu, je vous l'attends comme ça. Voilà, mettez bien vos pieds sous la roue. Maintenant, vous l'inclinez de 90 degrés dans un sens. Déjà, c'est difficile à faire. Vous êtes d'accord ? Vous y allez ? Si vous la sentez pas, vous le faites pas. Maintenant, vous la remettez horizontale. Voilà, voyez qu'il s'arrête. Et maintenant, si vous la tournez dans l'autre sens, la rotation va se faire en sens opposé. D'accord ? Pour que le moment scientifique, globalement, soit nulle, qu'il reste nulle. Alors maintenant, ce qu'on peut faire, redonnez-moi la roue.

notes

résumé



facile, tout le monde peut le prévoir. Ce qui est plus intéressant, c'est si maintenant on met en rotation la roue. ... Attendez, il ne faut pas qu'elle parte. ... Je la lâche, elle tourne. D'accord ? Ça, c'est quand même assez incroyable. ... Ça, on aimerait le comprendre, ça, on aimerait le modéliser. D'accord ? C'est un effet gyroscopique. Pourquoi ? Le moment de force liée au poids devrait permettre à la roue s'incliner. C'est ce qui se passe avec le frottement que vous êtes en train de voir maintenant. Mais s'il n'y avait pas de frottement, il y aurait un mouvement de l'axe qui se fait dans le plan horizontal. Pourquoi ? Là, la question. Alors, pour le comprendre, la première chose, c'est qu'on va permettre à la valise d'atterrir. Je crois que c'est le cas. Oui, oui, c'est bon. Elle est en train de s'éteindre. Donc, prenons notre roue, qui tourne autour de son axe de symétrie, et on a posé cet axe sur un support. D'accord ? Alors, supposons pour simplifier qu'elle a un mouvement de rotation ici de profil dans le sens aiguille du montre. Si elle tourne dans le sens aiguille du montre, vous prenez la paume de la main droite, vous la faites tourner dans le sens... Non, non, elle tourne dans le sens trigonométrique. Elle tourne comme ceci. Donc, vous faites tourner la paume de la main droite dans le sens trigonométrique, et vous voyez que le pouce vous donne l'orientation du moment cinétique qui va donc être orienté le long de l'axe comme ceci. OK ? Si on applique le théorème du moment cinétique au niveau du contact entre l'axe et le support, quel est le seul moment de force qui va intervenir si on églie les frottements, c'est celui du poids. Le poids est orienté verticalement vers le bas. Donc, si on prend le produit vectoriel du vecteur OG, d'accord,

[illegible]

résumé

.....

.....

.....

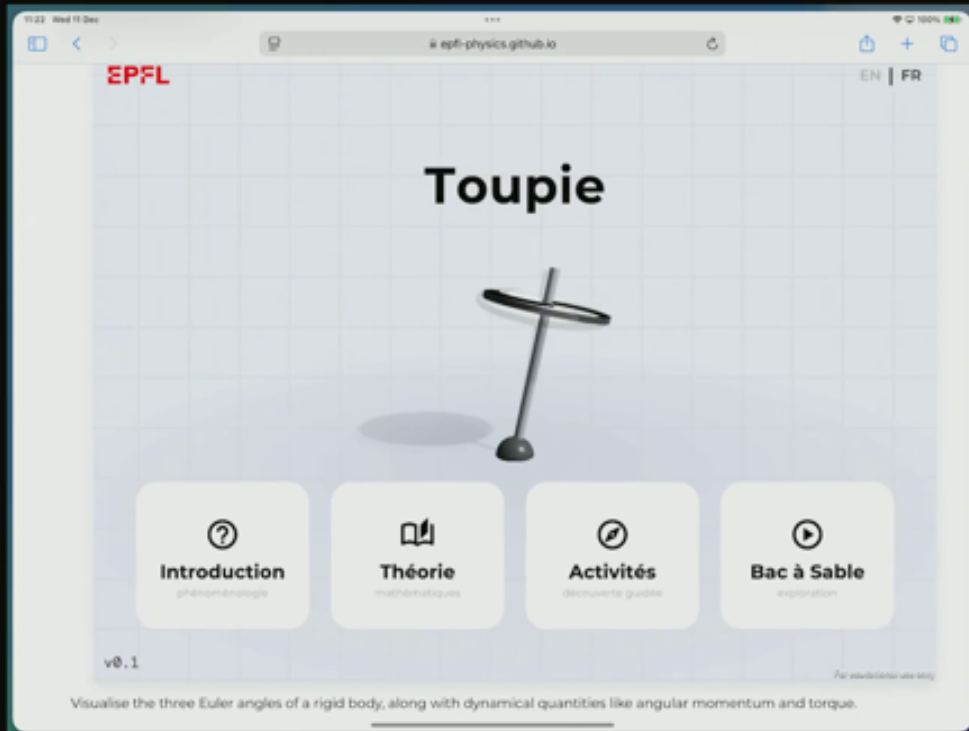
.....



avec le poids P , on va se retrouver avec un moment de force qui, lui, va être orienté dans le plan horizontal, d'accord, vers la droite, comme ceci. D'accord ? Qu'est-ce qu'on sait sur le moment de force ? C'est la dérivé temporelle du moment cinétique. Donc, le moment de force nous donne l'orientation de la variation infinitésimale du moment cinétique. Donc, le moment cinétique, il est comme ceci. La variation infinitésimale sera orientée comme cela. Et donc, le moment cinétique, qui était initialement comme ceci, va se déplacer pour être ensuite comme cela. Orienté dans le plan horizontal, vers un mouvement de rotation, disons, autour de l'axe, dans le sens trigonométrique. Et donc, automatiquement, l'axe, lui-même, va bouger, d'accord ? Donc, ce que vous êtes en train de visualiser avec la roue qui tourne comme ceci, c'est justement la précession du moment cinétique. Il n'y a pas de soucis en théâtre, ça devrait pas tomber. D'accord ? C'est la précession du moment cinétique autour de l'axe vertical. Alors, ça marche dans les deux sens. Je l'ai fait tourner dans un sens, qui était, attendez-moi, donc j'ai fait ceci. Maintenant, il faut essayer de faire tourner dans l'autre sens. On devrait pouvoir y arriver. C'est plus dur dans la pratique à réaliser, mais... Il faut que je donne assez de vitesse angulaire. Attendez, je vais le faire tourner comme cela. Voilà, tourne dans l'autre sens. Donc, une fois que vous avez un moment cinétique, ça tourne comme ceci, un moment cinétique, avant il était dans l'autre sens. C'est pour ça que le moment de force est orienté une fois dans un sens, une fois dans l'autre sens. C'est pour ça qu'on a un mouvement de précession qui se fait soit dans le sens trigonométrique, soit dans le sens des aiguilles de montre. Alors, si vous voulez jouer avec ceci,

[illegible]

résumé



vous pouvez ouvrir l'application Unity avec la Toupie.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

95m 0s



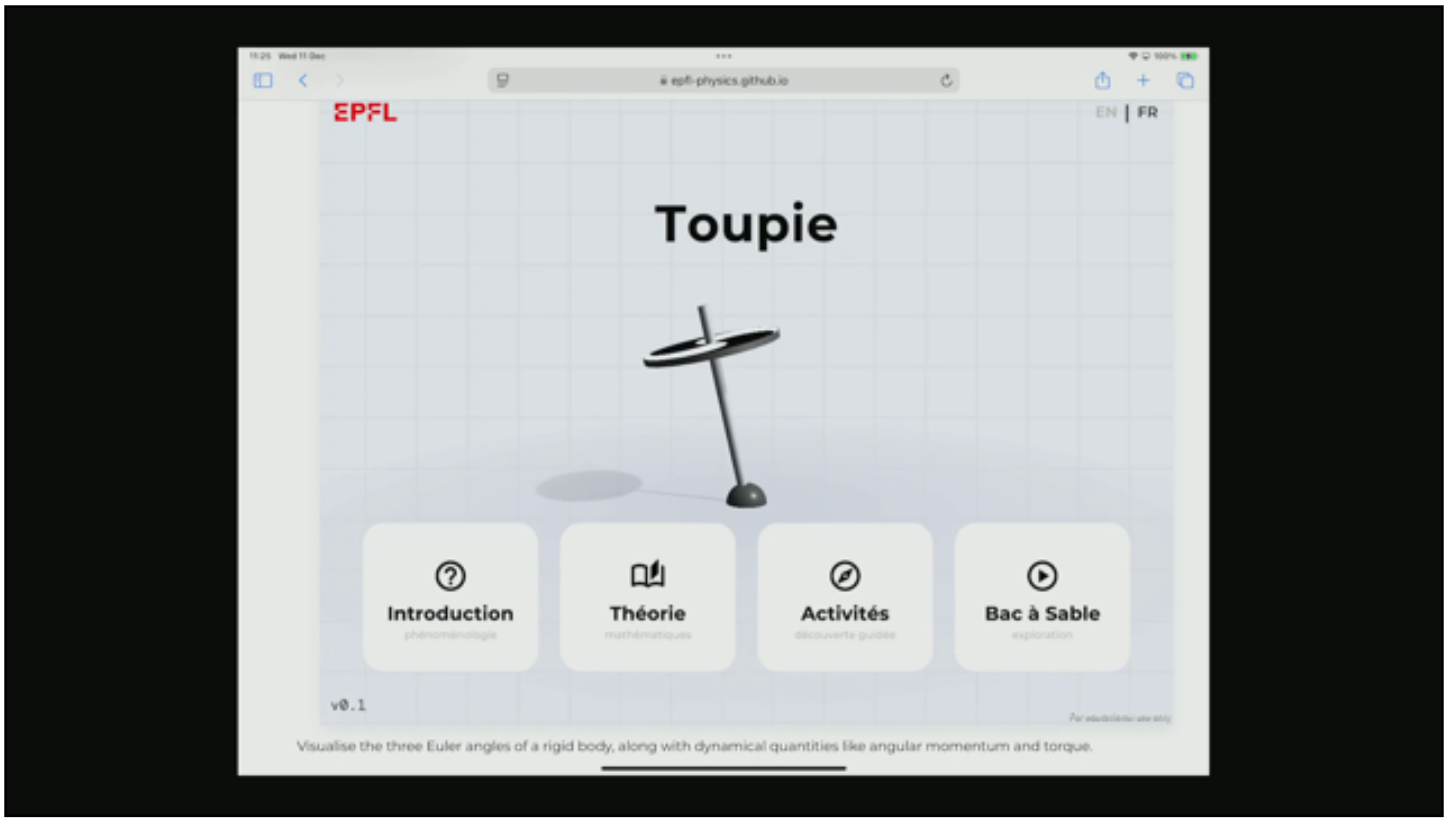
.....

.....

.....

.....

.....



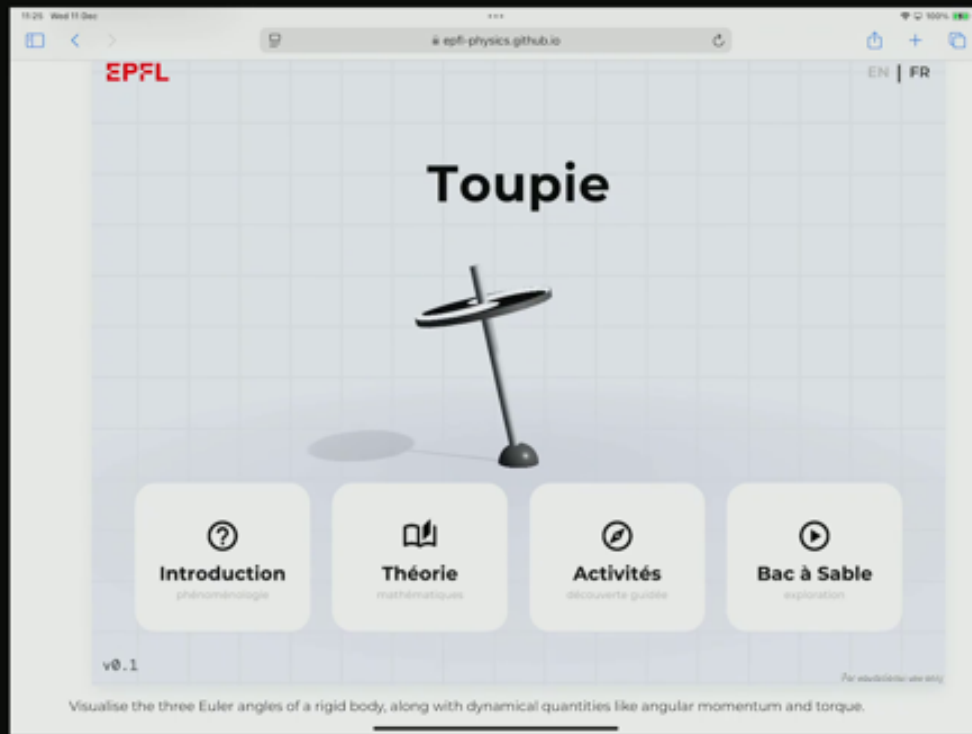
Vous allez, par exemple, on va faire autre chose, une fois, on va partir sur les activités. D'accord ? Prenons la deuxième activité. Dans cette deuxième activité, on nous demande de choisir l'orientation du vecteur moment de force extérieur appliqué au niveau du point de support. Le point qui est l'origine qui est ici. Il y a six possibilités. Clairement, le moment de force qui est le produit vectoriel, du vecteur qui part de haut vers G avec le poids qui est orienté vers le bas, sera orthogonal au plan vertical qui contient ces deux vecteurs. Ce sera un vecteur horizontal. Il ne va pas être orienté selon G. Donc il est horizontal, orthogonal à ce plan. Donc soit il est orienté vers l'avant, soit il est orienté vers l'arrière. Qu'est-ce qu'on essaie ? L'avant ou l'arrière ? Qui pense que c'est l'arrière ? Qui pense que c'est l'avant ? Il y en a beaucoup qui pensent pas grand chose. Donc, alors, prenons l'arrière, par exemple. Si on prend l'arrière, on vérifie. Ah, tiens, c'est correct. Ok. Alors maintenant, on continue. On a une roue avec un moment cinétique qui est orienté, comme vous le voyez ici. Vous pouvez peut-être penser que c'est étrange. Pourquoi il n'est pas horizontal ? Parce qu'il ne faut pas oublier que dans le moment cinétique, il y a la rotation complète. Donc la roue, elle ne tourne pas uniquement autour de l'axe. L'axe lui-même a un mouvement de précession et autour de l'axe vertical. Donc il y a deux mouvements de rotation, deux composantes de ω . Elle, zéro, n'est pas parfaitement horizontal. Première chose. Mais surtout, comme on vient de voir, dans cet exemple, le moment de force extérieure est orienté vers l'arrière. Il donne la direction de la variation infinitésimale du moment cinétique, l' $\vec{O}$, qui va donc être orienté, comme on voit ici, vers l'arrière. Donc en vue d'avion, pour un mouvement qui

notes

résumé

95m 3s





a lieu dans le sens et c'est qu'il y a une montre. Donc la réponse, c'est la deuxième. Vous voyez ? Vous pouvez jouer à ceci avec des orientations différentes et voir si vous avez compris pour y revenir sur ces activités qui se trouvent dans cette application Unity. D'accord ?

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

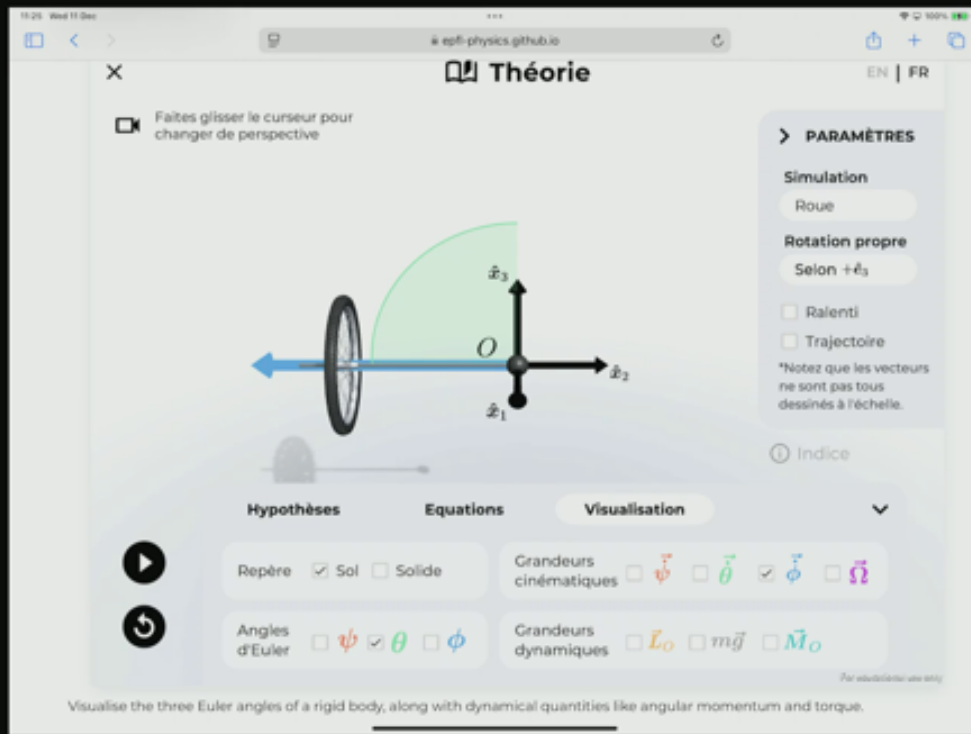
résumé

.....

.....

.....

.....



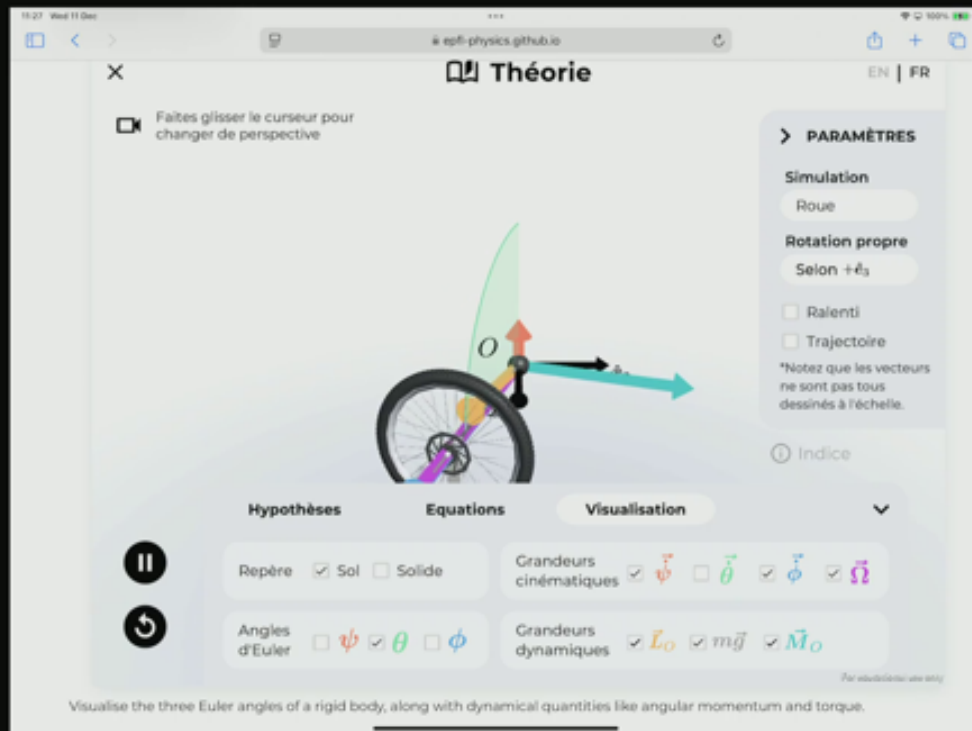
On peut aller faire quelque chose d'un peu plus sérieux. On a l'en regardé par exemple la théorie. OK ? On va s'intéresser nous à la roue, la voilà. On va visualiser ce qui se passe,

notes

résumé

97m 19s





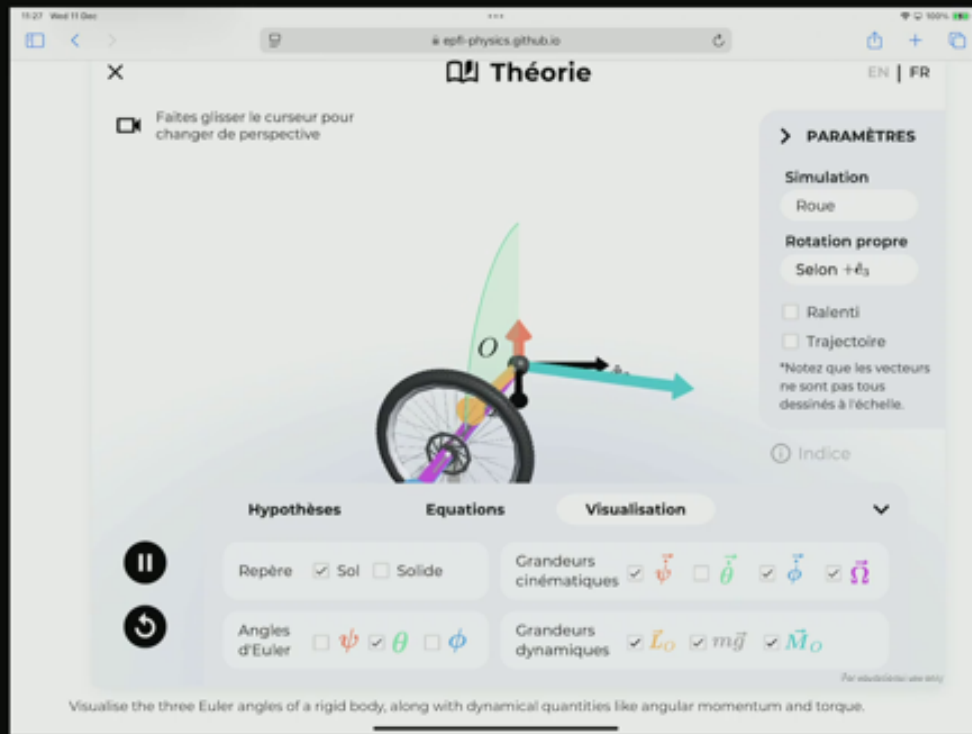
donc vous avez la vitesse angulaire de rotation propre, qui est donnée ici en bleu. Les psy et fill sont inversés, par rapport à Unity et à la description théorique qu'on a faite. On peut visualiser la vitesse angulaire de précession et la vitesse angulaire totale, c'est la somme des deux. La précession étant beaucoup plus lente que la rotation propre. Donc ce n'est pas tout à fait à l'échelle. D'accord ? On peut aussi visualiser le moment cinétique qui est orienté comme ça, dû aux deux vecteurs vitesses angulaires qui interviennent. Le poids est orienté vers le bas et on sait que le moment de force extérieure va être orienté ici vers l'arrière. Non, attendez-moi. Non, c'est dans l'autre sens, donc vers l'avant, absolument. Donc maintenant, la rotation va se faire dans quel sens ? La variation infinitésimale du moment cinétique tel que vous le voyez à l'écran, va être orientée vers l'avant. Donc si vous le voyez en vue d'avion, ça veut dire qu'on a une rotation qui aura lieu dans le sens trigonométrique. Regardons pour voir. Effectivement, c'est le sens dans lequel la roue va tourner. D'accord ? Donc c'est vraiment ce qui se passe en termes du comportement dynamique du moment cinétique qui dicte ses effets gyroscopiques. C'est pour ça qu'on a ces phénomènes de rotation. D'accord ? Alors, si on a un gyroscope avec un axe donné et puis des cadrants qui sont immobiles, si on applique une force, c'est comme la roue avec son moment de force, on va induire un mouvement de rotation. Donc si je reprends le gyroscope qui est ici, que je le fais tourner, est-ce qu'il y a quelqu'un qui a joué avec la dramelle pendant la pose ? Il y a quelqu'un qui a dû jouer avec la dramelle pendant la pose et il y a la petite gomme qui a disparu. Est-ce que quelqu'un l'a vue ? Non

notes

résumé

97m 28s





? Alors... Bon, bref, on gardera ça plus tard. Je peux malheureusement pas le lancer,

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

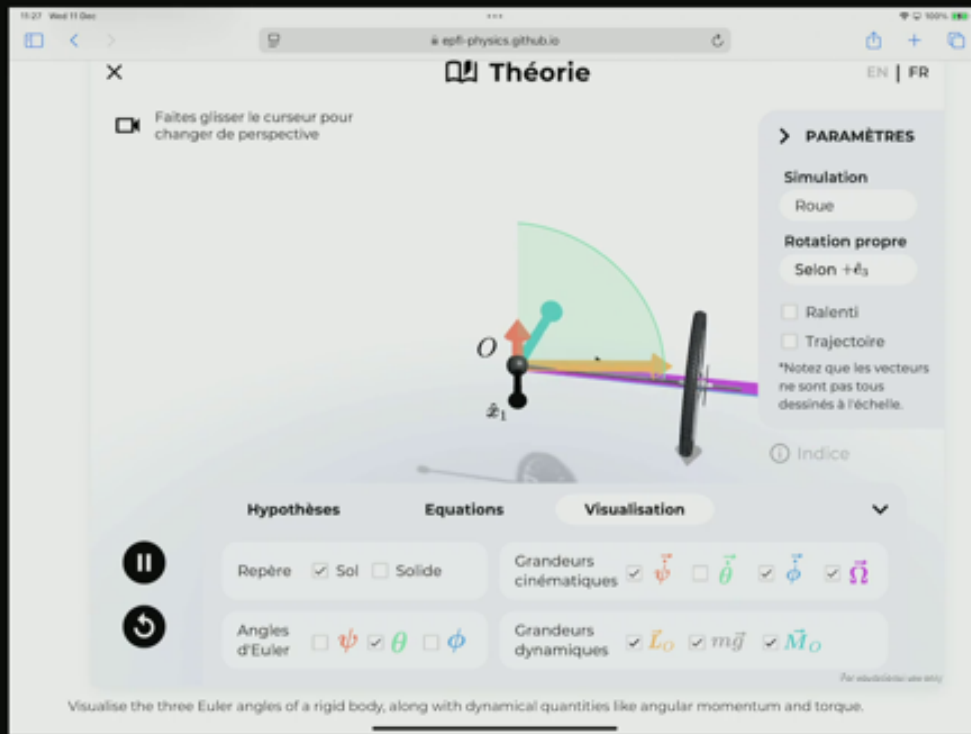
.....

.....

.....

.....

.....



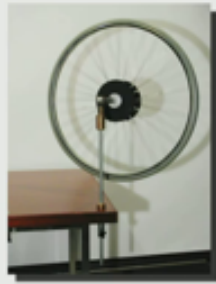
mais vous avez vu ce qui se passait tout à l'heure, peut-être à la main, mais ça ira pas assez vite. Si je suspends une masse, vous voyez, le gyroscope se met à tourner dans un sens. On a induit le même mouvement de rotation que celui qu'on a vu pour la route vélo. Alors évidemment que si c'est de l'autre côté que le moment de force est appliqué, on s'en s'oppose, on va avoir une rotation qui se fait dans l'autre sens.

notes

résumé

99m 40s





- Une roue de vélo dont l'axe de rotation est fixé à une extrémité O d'une tige verticale fixe est mise en mouvement de rotation propre dans un plan vertical qui génère un moment cinétique horizontal L_O . Le poids $P = Mg$ de la roue génère un moment de force extérieure horizontal unique M_O^{ext} .
- D'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique L_O se met à tourner dans le plan horizontal,

$$M_O^{\text{ext}} = R_G \times P = \dot{L}_O = \frac{L_O(t+dt) - L_O(t)}{dt}$$

Ainsi, la roue de vélo est en précession autour de la tige verticale fixe.

Si jamais il y a un entre-boue qui retrouve la petite gomme, qui va ici sur la dramelle, merci de la remettre en place tout à l'heure. Merci. Voilà. Alors, revenons sur le cours.

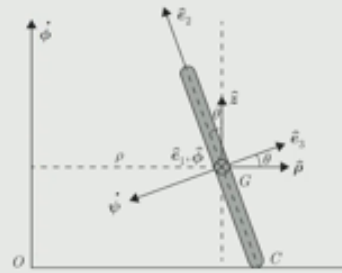
notes

résumé

100m 11s



- **Roue de vélo** : masse M , rayon R qui roule sans glisser. Son centre de masse G est en mouvement circulaire uniforme de rayon $\rho = \text{cste}$ à vitesse angulaire $\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{z} = \text{cste}$ où le vecteur unitaire $\hat{z} = \cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_3$.



- **Objectif** : on cherche à déterminer l'angle d'inclinaison $\theta = \text{cste}$ du plan de la roue.

- **Repère d'inertie** : $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ où $\hat{e}_1$ est horizontal en tout temps

1 Cinématique :

- **Vitesse angulaire** : précession $\dot{\phi}$ et rotation propre $\dot{\psi}$

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} \quad (13.60)$$

- **Vitesse du centre de masse** : MCU de rayon ρ et de vitesse angulaire $\dot{\phi}$

$$(13.61)$$

On va faire une toute belle version de cette précession de la route vélo. Y a-t-il quelqu'un dans la salle qui fait de la politique ? Non ? Y a pas un politicien ? Un futur politicien ? Y a personne ? Est-ce qu'il y a quelqu'un qui aime la politique ? Y a Maxence ? Maxence, venez me retrouver. Vous allez comprendre pourquoi j'ai parlé de politique. Vous allez inaugurer cette expérience en coupant le ruban. Pour l'instant, la route tourne autour de son axe. Tout va bien. Maintenant, on va couper le fil. Comme pour la route qui tournait sur le support, on aura le même phénomène. On va avoir un mouvement de rotation. On va avoir le sens de la rotation. La route tourne dans ce sens-là. Le moment cinétique est orienté comme ceci. En suite, on a le moment de force qui va être orienté par rapport à ce support. Ça va être le produit vectoriel du vecteur position avec le poids. Il est orienté comme cela. Qu'est-ce que je disais ? On a le moment cinétique qui est orienté comme ceci. On a le moment de force qui était orienté comme cela. Si le moment cinétique est comme ceci, le moment de force est comme cela. On va avoir une rotation qui va se faire dans ce sens. Couper le fil. Je vais la relancer un peu pour que l'effet soit plus grand. On va donner le même sens. Couper le fil de gauche. Effectivement, c'est bien le sens de rotation. Là, il y a le moment de force des frottements de l'air qui intervient. On a la route qui se couche gentiment. Merci beaucoup Maxence. Merci Monsieur le Maire. Applaudissements Pour ceux d'entre vous qui font du vélo... Pourquoi l'accélération du centre de masse correspond à la somme des forces ? Pourquoi l'accélération du centre de masse ne correspond pas à la somme des

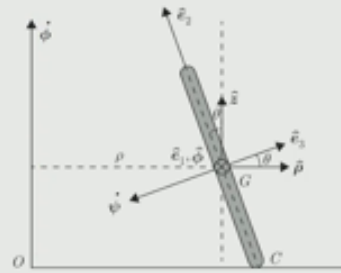
notes

résumé

100m 22s



- **Roue de vélo** : masse M , rayon R qui roule sans glisser. Son centre de masse G est en mouvement circulaire uniforme de rayon $\rho = \text{cste}$ à vitesse angulaire $\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{z} = \text{cste}$ où le vecteur unitaire $\hat{z} = \cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_3$.



- **Objectif** : on cherche à déterminer l'angle d'inclinaison $\theta = \text{cste}$ du plan de la roue.

- **Repère d'inertie** : $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ où $\hat{e}_1$ est horizontal en tout temps

1 Cinématique :

- **Vitesse angulaire** : précession $\dot{\phi}$ et rotation propre $\dot{\psi}$

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} \quad (13.60)$$

- **Vitesse du centre de masse** : MCU de rayon ρ et de vitesse angulaire $\dot{\phi}$

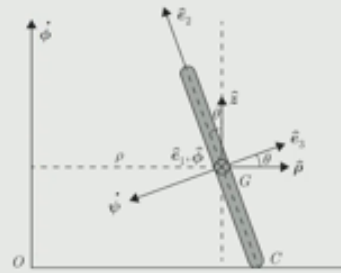
$$(13.61)$$

forces ? Si, elle correspond à la somme des forces. Par contre, il y a deux choses qui font... Là, ce n'est pas du tout le théorème du centre de masse qui est important. C'est vraiment l'application du théorème du moment cinétique par rapport au point d'attache de l'axe. Si vous l'appliquez en ce point-là, c'est le moment de force lié au poids qui explique ce qui se passe. C'est ce qu'on vient de voir avec l'application. Si on suppose qu'on exige les frottements, on a un mouvement de précession qui se fait à vitesse angulaire constante. Le centre de masse a une accélération sans trippette. Là, c'est un peu plus compliqué puisque la roue finit par se coucher lié au frottement. Ce qu'on aimerait comprendre maintenant, c'est l'angle que va prendre une route vélo. Quand elle effectue un virage. Bon, c'est normal. Elle part dans n'importe quel sens, mais la roue prend un virage et automatiquement elle s'incline quand elle prend le virage. On la refait. La roue prend un certain angle d'inclinaison quand elle prend le virage. C'est cette angle d'inclinaison qu'on aimerait maintenant déterminer. Pour le faire, on va faire une approximation assez drastique. On suppose que notre vélo a un mouvement... Le centre de masse du vélo a un mouvement circulaire comme celui dont vous parliez Martin. Un mouvement circulaire autour d'un axe de rotation qui est ici. Ce qui veut dire que la distance qui sépare le centre de masse de l'axe, c'est distance roue et constante. On a un vecteur vite-essangulaire qui décrit la pressession, donc la rotation du centre de masse autour de cet axe, qui est le vecteur ϕ -point. C'est la dérivée temporelle de l'angle azimutale dans le plan horizontal, multiplié par le vecteur unitaire vertical $\hat{z}$ -chapo. C'est une constante. Ce qu'on va devoir faire dans un premier temps, c'est de la cinématique. Cette cinématique, on va la faire dans le repère

notes

résumé

- **Roue de vélo** : masse M , rayon R qui roule sans glisser. Son centre de masse G est en mouvement circulaire uniforme de rayon $\rho = \text{cste}$ à vitesse angulaire $\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{z} = \text{cste}$ où le vecteur unitaire $\hat{z} = \cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_3$.



- **Objectif** : on cherche à déterminer l'angle d'inclinaison $\theta = \text{cste}$ du plan de la roue.

- **Repère d'inertie** : $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ où $\hat{e}_1$ est horizontal en tout temps

1 Cinématique :

- **Vitesse angulaire** : précession $\dot{\phi}$ et rotation propre $\dot{\psi}$

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} \quad (13.60)$$

- **Vitesse du centre de masse** : MCU de rayon ρ et de vitesse angulaire $\dot{\phi}$

$$(13.61)$$

d'inertie à notre roue. Ce repère d'inertie, on va le choisir d'une manière suivante. Le troisième vecteur est l'axe de symétrie orienté vers la droite. On va prendre un deuxième vecteur qui, en perspective, est orienté le long de la roue comme ceci. Le premier, si vous faites le produit vectoriel de E1-chapo avec E2-chapo, le premier, il rentre dans le plan. Si vous prenez la roue qui est là, vous la voyez de profil. Et E1-chapo rentre dans le plan. 2-chapo est orienté vers le haut. 3-chapo va être orienté le long de l'axe vers l'extérieur. Ça, c'est l'orientation du repère. On s'arrange pour que, même si la roue tourne, elle tourne. E1-chapo sera toujours horizontal dans le plan de la roue. 2-chapo sera toujours vu de profil, le long du profil de la roue, dans le plan de la roue avec une direction qui est orthogonal par rapport à E1-chapo. Ce qu'on cherche à faire, c'est de déterminer l'angle theta qu'on suppose constant. La première étape, c'est d'écrire le vector vitesse angulaire omega. Cette vitesse angulaire totale, c'est la somme de 2 vitesses angulaires, la vitesse angulaire de précession de la roue, la précession du 100 de masse de la roue autour de l'axe de rotation verticale lorsque la roue fait un virage. C'est ceci qu'on est en train de décrire. Ça, c'est phi point avec le vector vitesse angulaire de précession qui est verticale.

notes

résumé

- Vitesse angulaire : (13.60)

$$\Omega = \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 + (\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

- Vitesse du centre de masse : MCU

$$V_G = \rho \dot{\phi} \hat{e}_1 \quad (13.61)$$

- Roulement sans glissement : $V_C = 0$



(13.62)

- Condition de liaison : précession et rotation propre (13.61) = (13.62)

(13.63)

- Vitesse angulaire : (13.63) dans (13.60)

(13.64)

Et puis, la roue, elle a aussi un mouvement de rotation propre autour de son axe. Alors, ces trous, il faut imaginer qu'elle a un mouvement de roulement sanguissement qui est orienté vers l'arrière. Ce qui veut dire que la rotation propre, on va la décrire avec un vector vitesse angulaire qui est orienté vers l'intérieur. Ça, c'est le vector 6 points. La somme des deux de la rotation propre et de la précession nous donne la vitesse angulaire. Il n'y a pas de mutation étant donné que theta est constant. Maintenant, on va les exprimer dans le repère d'inertie. On commence par écrire que phi point, c'est phi point, ensuite, 6 points est orienté sans se opposer à e3 chapeaux. C'est moins 6 points fois e3 chapeaux. Et puis, z chapeaux, c'est le cos de theta, e2 chapeaux plus le signe de theta, e3 chapeaux. On a pris z chapeaux qui est ici. On le projette dans le repère d'inertie. Donc, on peut récrire ceci comme phi point que sinus theta fois e2 chapeaux plus phi point sinus theta moins 6 chapeaux fois e3 chapeaux. Maintenant, on sait aussi que le centre de masse a un mouvement circulaire sur une trajectoire de rayon rho. Donc, la vitesse du centre de masse, alors au moment où on l'a décrit ici, comme la roue se dirige vers l'arrière, la vitesse du centre de masse rentre dans le plan. Donc, elle est orientée selon un chapeau, ou selon phi chapeaux qui est le même vecteur. Donc, c'est Vg fois phi chapeaux, c'est-à-dire que c'est rho phi point pour un mouvement circulaire autour de l'axe vertical avec un rayon rho. C'est rho phi point phi chapeau, ou aussi rho phi point fois e1 chapeau. Alors, les mouvements de rotation propres et de précisions sont liés. Pourquoi ? Parce que la roue roule sans glisser, ce qui veut dire que la vitesse du point

notes

résumé

106m 37s



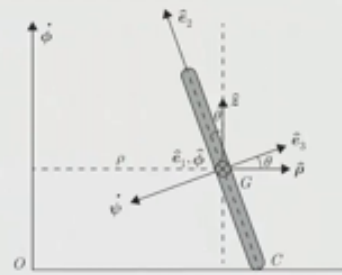
- Vitesse angulaire : (13.60)

$$\Omega = \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 + (\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\psi}) \hat{e}_3$$

- Vitesse du centre de masse : MCU

$$V_G = \rho \dot{\phi} \hat{e}_1 \quad (13.61)$$

- Roulement sans glissement : $V_C = 0$



(13.62)

- Condition de liaison : précession et rotation propre (13.61) = (13.62)

(13.63)

- Vitesse angulaire : (13.63) dans (13.60)

(13.64)

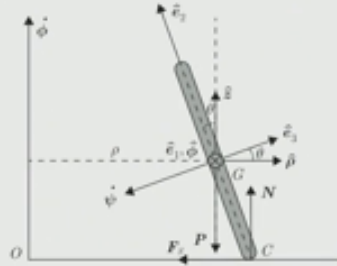
de contact est nulle, et ça, c'est quelque chose qu'on va maintenant exploiter.

notes

résumé

● Dynamique :

- **Théorème du moment cinétique** : on évalue le théorème du moment cinétique au point de contact C entre la roue et le sol, comme cela les moments de force dus à la force de réaction normale N et à la force de frottement statique F_S sont nuls. Le seul moment de force non-nul M_C^{ext} est dû au poids $P = Mg$.



- **Théorème du moment cinétique** : évalué en C

$$\sum M_C^{\text{ext}} = \dot{L}_C \quad (12.31)$$

- **Moment de force extérieure** : dû au poids évalué en C

$$(13.65)$$

D'accord ? Donc, on a un roulement sans glissement, ce qui signifie que la vitesse du centre de masse V_G , c'est le produit vectoriel de ω avec le vecteur issu du point de contact qui va jusqu'au centre de masse G . Le vecteur ω , on vient de le déterminer, c'est $\dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_2$ chapeaux, plus $\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_3$ chapeaux. On a le produit vectoriel avec le vecteur $\mathbf{C}G$, qui est ici, qui est orienté dans le même sens que $\mathbf{e}_2$ chapeaux. Il est clair que la norme de ce vecteur, c'est le rayon d'arrou. Le rayon d'arrou, c'est grand air. Ce sera donc grand air fois $\mathbf{e}_2$ chapeaux. Donc, la contribution sont deux chapeaux de ω n'apporte rien au produit vectoriel. Le produit vectoriel de trois chapeaux avec deux chapeaux va nous donner d'après la règle du logo Mercedes, moins $\mathbf{e}_1$ chapeaux. Donc, on va se retrouver avec moins air $\dot{\phi} \sin \theta$ moins ψ point fois $\mathbf{e}_1$ chapeaux. Or, on a déjà une expression pour V_G qui est là, aussi selon $\mathbf{e}_1$ chapeaux. Ça doit être égal. Ça nous donne donc une identité scalaire. On va la récrire en divisant par air chapeau. On aura alors la condition liaison suivante. $\dot{\phi} \sin \theta$ moins ψ point est égal à l'opposé du rapport d'heureau sur air fois $\dot{\phi}$ point. Et ça, c'est génial. Ça veut dire qu'on a été capables d'exprimer la précession en termes, plutôt la rotation propre en termes de la précession. Si la roue roule sans glisser, la vitesse angulaire de rotation propre est forcément liée à la vitesse angulaire de précession. C'est ce qu'on a été capables d'écrire. On a pu exprimer l'une en termes de l'autre. Maintenant, si on revient au vector vitesse angulaire, on va le réécrire. La première composante, on ne la change pas. La deuxième, on va la réécrire exclusivement en termes

notes

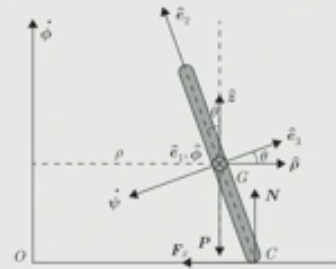
résumé

108m 56s



• **Dynamique :**

- **Théorème du moment cinétique :** on évalue le théorème du moment cinétique au point de contact C entre la roue et le sol, comme cela les moments de force dus à la force de réaction normale N et à la force de frottement statique F_S sont nuls. Le seul moment de force non-nul M_C^{ext} est dû au poids $P = Mg$.



- **Théorème du moment cinétique :** évalué en C

$$\sum M_C^{\text{ext}} = \dot{L}_C \quad (12.31)$$

- **Moment de force extérieure :** dû au poids évalué en C

$$(13.65)$$

de phi point grâce à la condition qui est ici. On va donc se retrouver avec moins roue sur air fois phi point fois u3 chapeau. C'est terminé pour la cinématique. C'est tout ce qu'on peut en tirer. Passons maintenant à ce qui est vraiment fondamental, la dynamique. La deuxième, on va la réécrire en termes de phi point grâce à la condition qui est ici.

notes

résumé



(12.31)

$$\mathbf{r}_{CG} \times (\cos \theta \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3)$$

(13.65)

37 / 49

13.3.2 Roue de vélo

- Vitesse angulaire : $\Omega = \Omega_2 \hat{e}_2 + \Omega_3 \hat{e}_3$

$$\Omega = \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 - \frac{\rho}{R} \dot{\phi} \hat{e}_3 \quad (13.64)$$

- Moment cinétique : évalué en C

(13.66)



- Changement de base : rotation d'un angle θ dans le plan

- Moment cinétique : évalué en C (13.67) dans (13.66) do

Dr. Sylvain Bréchet

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

Alors, on pourrait, je dis bien, on pourrait appliquer le théorème du centre de masse au niveau du centre de masse et lier les forces entre elles à travers l'accélération du centre de masse. Je dis, on pourrait le faire parce qu'on ne va pas le faire. On sait que le vélo a une rotation autour du point de contact comme il a un roulement sans glissement. Donc, on va directement appliquer le théorème du moment signétique au niveau du point de contact. Il y a une raison très pratique à ça. Il y a 3 forces qui s'exercent sur cette route vélo. Il y a son poids qui s'exerce au niveau du centre de masse, mais il y a également la force de réaction normale du sol, ainsi qu'une force de frottement statique. On ne connaît ni la force de frottement statique, ni la force de réaction normale et très franchement, s'en fiche. Donc, pour ne pas avoir à s'en préoccuper, on va appliquer le théorème du moment signétique au point où s'appliquent ces forces, soit au niveau du point de contact C. Ainsi, le seul moment de force dont on va se préoccuper, c'est celui qui est dû au poids qui s'applique au centre de masse. C'est assez intuitif. Donc, on va avoir un seul moment de force extérieur, évalué en C, qui est le moment de force extérieur du poids. C'est le produit vectoriel du vecteur issu de C qui pointe sur le point d'application de G qu'elle s'endemasse. Produit vectoriel avec le poids, ce sera donc R2 chapeau. Produit vectoriel avec le poids qui est moins MG fois Z chapeau. On peut mettre en évidence les grandeurs scalaires. On a moins MGR, 2 chapeaux. Produit vectoriel avec Z chapeaux, qui ont récris comme le cosinus de theta, fois E2 chapeau, plus le sinus de theta, fois E3 chapeau. La composante, selon E2 chapeaux du poids, n'intervient

notes

résumé

111m 36s





(12.31)

$$\times (c \cdot \theta \hat{e}_2 + s \cdot \theta \hat{e}_3)$$

(13.65)

37 / 49

13.3.2 Roue de vélo

- Vitesse angulaire : $\Omega = \Omega_2 \hat{e}_2 + \Omega_3 \hat{e}_3$

$$\Omega = \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_2 - \frac{\rho}{R} \dot{\phi} \hat{e}_3 \quad (13.64)$$

- Moment cinétique : évalué en C

(13.66)



- Changement de base : rotation d'un angle θ dans le plan

- Moment cinétique : évalué en C (13.67) dans (13.66) do

Dr. Sylvain Bréchet

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

pas dans le produit vectoriel. Le produit vectoriel de E2 chapeau avec 3 chapeaux nous donne E1 chapeau. On aura donc moins MRG, sinus theta, fois E1 chapeau. C'est le vecteur unitaire qui rentre dans le plan. C'est le même que FI chapeau. On va récrire ceci en termes FI chapeau. C'est juste une identité qui sera utile par la suite. On a donc moins MRG, sinus theta, fois FI chapeau. Le moment de force extérieur, on l'a. Ce qu'il nous faut maintenant, c'est la dérivé temporelle du moment cinétique évalué par rapport au point de contact. D'accord ? Alors là, il y a un petit peu plus de gymnastique à faire.

notes

résumé

- **Moment cinétique** : évalué en C (13.68)

$$L_C = - \left(I_{C,2} \sin \theta + I_{C,3} \frac{\rho}{R} \right) \dot{\phi} \cos \theta \hat{\rho} + \left(I_{C,2} \cos^2 \theta - I_{C,3} \frac{\rho}{R} \sin \theta \right) \dot{\phi} \hat{z}$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique où $\rho = \text{cste}$, $\theta = \text{cste}$, $\dot{\phi} = \text{cste}$

(13.69)

- **Formule de Poisson** : précession de $\hat{\rho}$ avec $\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{z}$

$$\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi} \times \hat{\rho} = \dot{\phi} \hat{z} \times \hat{\rho} = \dot{\phi} \hat{\phi} \quad (5.6)$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique (5.6) dans (13.64)

(13.70)

- **Théorème de Huygens-Steiner** : cylindre : plein $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ creux

(même axe)

(13.71)

On a omega qui est donné ici. Ça forme général. On l'avait trouvé. On a une composante omega-2, qui est la composante que vous voyez ici. La composante omega-3, signée inclus, est juste à côté. Et on sait que, pour appliquer le théorème du moment cinétique au niveau du point de contact, on aura besoin de dériver par rapport au temps de la dérivée temporelle du moment cinétique évalué en ce point de contact. Dans le repère d'inertie, ça formait la suivante, elle sait, c'est, comme il y a deux composantes non nulles de omega, la deuxième à la troisième, c'est le moment d'inertie IC2, fois omega-2, fois 2 chapeaux. Plus le moment d'inertie son troisième axe principal d'inertie, qui est IC3, fois omega-3, fois 3 chapeaux. D'accord ? Alors maintenant, les moments d'inertie, les explicités, on les garde pour l'instant, donc c'est IC2. Omega-2, on le lit en-dessus, c'est phi-point-cosinus theta, fois 2 chapeaux. On a ensuite IC3, c'est un C, c'est pas un G. IC3, voilà. Omega-3, alors, non, il y a un signe moins, excusez-moi. Voilà. Donc c'est rho sur R, fois phi-point, fois les trois chapeaux. D'accord ? Il y a différentes manières de procéder. Ce qu'on pourrait faire, c'est dériver par rapport au temps la relation telle qu'elle a ici. Seulement, il faut faire attention, en utilisant les formules de Poisson, il y a une méthode qui est plus sûre, qui marchera à coup sûr, c'est de faire un changement de base et d'utiliser plutôt un repère cylindrique. Pourquoi ? Parce qu'on sait que dans un repère cylindrique, les dérivés temporels des vecteurs unitaires sont liés uniquement à la rotation autour de l'axe vertical. On fera pas d'erreur en faisant ça. Donc on va exprimer E2 chapeaux et E3 chapeaux en termes de rho chapeaux et de z chapeaux. Donc E2 chapeaux, c'est moins le sinus de theta fois rho chapeaux plus le cosinus de

notes

résumé

114m 3s



- **Moment cinétique** : évalué en C (13.68)

$$L_C = - \left(I_{C,2} \sin \theta + I_{C,3} \frac{\rho}{R} \right) \dot{\phi} \cos \theta \hat{\rho} + \left(I_{C,2} \cos^2 \theta - I_{C,3} \frac{\rho}{R} \sin \theta \right) \dot{\phi} \hat{z}$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique où $\rho = \text{cste}$, $\theta = \text{cste}$, $\dot{\phi} = \text{cste}$

(13.69)

- **Formule de Poisson** : précession de $\hat{\rho}$ avec $\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{z}$

$$\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi} \times \hat{\rho} = \dot{\phi} \hat{z} \times \hat{\rho} = \dot{\phi} \hat{\phi} \quad (5.6)$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique (5.6) dans (13.64)

(13.70)

- **Théorème de Huygens-Steiner** : cylindre : plein $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ creux

(même axe)

(13.71)

theta fois z chapeaux. Et puis E3 chapeaux, c'est le cosinus de theta fois rho chapeaux plus le sinus de theta fois z chapeaux. En effectuant la substitution, on a alors le moment cinétique en C qu'on peut exprimer en termes du repère cylindrique. Ça sera IC2 fois phi point cosinus theta qui multiplie E2 chapeaux, soit moins le sinus de theta fois rho chapeaux plus le cosinus de theta fois z chapeaux. Et on a ensuite moins IC3 fois rho sur R, fois phi point, qui multiplie E3 chapeaux, soit le cosinus de theta fois rho chapeaux plus le sinus de theta fois z chapeaux. Bon. Remettons ceci en forme pour factoriser en termes des vecteurs unitaires

notes

résumé

vélo **EPFL**

moment cinétique : on évalue le moment cinétique au point de contact C entre la roue et le sol. Les moments de force dus à la réaction normale N et au frottement statique F_S sont nuls. Le seul moment de force non nul est dû au poids.

moment cinétique : évalué en C

$$\vec{L}_C = I_{C,2} \dot{\phi} \hat{e}_2 + I_{C,3} \dot{\psi} \hat{e}_3 \quad (12.31)$$

force extérieure : dû au poids évalué en C

$$\vec{G} \times \vec{P} = R \hat{e}_1 \times (-Mg \hat{e}_2) = -MgR \hat{e}_1 \times (\cos\theta \hat{e}_2 + \sin\theta \hat{e}_3)$$

$$MRg \sin\theta \hat{e}_1 = -MRg \sin\theta \dot{\phi} \hat{e}_1 \quad (13.65)$$

13 - Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes 37 / 49

13.3.2 Roue de

- Vitesse angulaire

$$\Omega = \dot{\phi} \cos\theta \hat{e}_2$$
- Moment cinétique

$$\vec{L}_C = I_{C,2} \Omega$$

$$= I_{C,2} \dot{\phi} \cos\theta \hat{e}_2$$
- Changement de direction

$$\hat{e}_2 = -\sin\theta \hat{e}_1$$

$$\hat{e}_3 = \cos\theta \hat{e}_1$$
- Moment cinétique

$$\vec{L}_C = I_{C,2} \dot{\phi} \cos\theta \hat{e}_2$$

Dr. Sylvain Bréchet

du repère cylindrique. C'est déjà fait ici. Voilà donc l'expression du moment cinétique évalué au point C. Bon. Alors qu'est-ce qui est constant ? Qu'est-ce qui peut varier ? La bonne nouvelle, c'est que quasiment tout est constant. La seule grandeur qui n'est pas constante, c'est le vecteur unitaire radial qui va tourner autour de l'axe vertical. Toutes les autres grandeurs sont des constantes, parce qu'on a un solide indéformable. L'angle theta est constant, rho est constant, R est constant, d'accord ? Phi point est constant, donc comme je le disais, la seule grandeur qui varie, c'est celle-ci. Donc si on dérive par rapport au temps, le moment cinétique, ce deuxième terme disparaît, d'où l'avantage des coordonnées cylindriques. Il y a moins de calcul à faire, d'accord ? Donc si on prend la dérivée du moment cinétique, on a le pré-facteur qui va être constant, soit moins $I_{C,2} \sin\theta$, plus $I_{C,3}$, foire au sur-air, le toutefois Phi point, foire le cosinus de theta. Ce qui varie, c'est rochapo, on aura donc un rochapo point. Pour déterminer la dérivée temporelle de rochapo, on utilise les formules de poisson. Attention, il y a un petit piège. Ce n'est pas omega qu'il faut utiliser. Parce qu'en omega, il y a deux rotations. Nous, on veut uniquement la précession. Le repère cylindrique, il n'a pas de mouvement de rotation dans un plan vertical. Il tourne uniquement autour de l'axe vertical. Donc quand on applique poisson, ce sera le produit vectoriel de la vitesse angulaire de précession avec rochapo. C'est donc Phi point Z-chapo, produit vectoriel avec rochapo, le produit vectoriel du troisième vecteur avec le premier et le deuxième. On a donc un Phi point Phi-chapo. Et on explique. Et donc, la dérivée temporelle du moment cinétique évalué au point de contact, en remettant un tout petit peu algébriquement en forme de nos équations, on peut l'écrire comme moins, $I_{C,2}$ plus grand air

notes

résumé

117m 5s



moment cinétique : on
me du moment cinétique
tact C entre la roue et
ela les moments de force
e réaction normale N et
ottement statique F_S
ul moment de force
est dû au poids



moment cinétique : évalué en C

$$(12.31)$$

force extérieure : dû au poids évalué en C

$$\vec{G} \times \vec{P} = R \hat{e}_1 \times (-Mg \hat{e}_2) = -MgR \hat{e}_1 \times (\cos\theta \hat{e}_2 + \sin\theta \hat{e}_3)$$

$$MRg \sin\theta \hat{e}_1 = -MRg \sin\theta \dot{\phi} \hat{e}_1 \quad (13.65)$$

- Vitesse angul

$$\Omega = \dot{\phi} \cos\theta \hat{e}_2$$

- Moment ciné

$$\vec{L}_C = I_{C,2} \Omega$$

$$= I_{C,2} \dot{\phi} \cos\theta \hat{e}_2$$

- Changement

$$\hat{e}_2 = -\sin\theta \hat{e}_1$$

$$\hat{e}_3 = \cos\theta \hat{e}_1$$

- Moment ciné

$$\vec{L}_C = I_{C,2} \dot{\phi} \cos\theta \hat{e}_2$$

sur Ω , fois $I_{C,2}$, sinus theta, et on a mis maintenant des termes en évidence. On va se retrouver avec un Ω sur air. $\dot{\phi}$ point carré, fois le cosinus theta, le tout, fois $\dot{\phi}$ point chapo. Bon, alors c'est maintenant qu'on va devoir déterminer nos moments d'inertie. Notre route-vélos, c'est un cylindre, en gros. Alors si toute la masse se trouvait au niveau des pneus, eh bien, on aurait un moment d'inertie qui vaut émer carré. D'accord, retour de l'axe principal d'inertie. Si toute la masse est répartie de manière homogène à l'intérieur du cylindre qui forme la roue, on aurait une demi de émer carré. La réalité est entre les deux. On va donc introduire un paramètre lambda qui varie entre une demi et un. D'accord, ça, c'est un paramètre que j'introduis souvent en examen, d'accord, pour des grandeurs qui sont des cylindres, pour donner une forme générale, et considérer ensuite des cas limites pour comprendre ce qui se passe. Alors, prenons d'abord $I_{C,3}$ qu'on connaît. $I_{C,3}$, c'est le moment d'inertie de la roue. Alors, je reviens peut-être juste en arrière.

notes

résumé

- **Moment cinétique** : évalué en C (13.68)

$$L_C = - \left(I_{C,2} \sin \theta + I_{C,3} \frac{\rho}{R} \right) \dot{\phi} \cos \theta \hat{\rho} + \left(I_{C,2} \cos^2 \theta - I_{C,3} \frac{\rho}{R} \sin \theta \right) \dot{\phi} \hat{z}$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique où $\rho = \text{cste}$, $\theta = \text{cste}$, $\dot{\phi} = \text{cste}$

$$\dot{L}_C = - \left(I_{C,2} \sin \theta + I_{C,3} \frac{\rho}{R} \right) \dot{\phi} \cos \theta \hat{\rho} \quad (13.69)$$

- **Formule de Poisson** : précession de $\hat{\rho}$ avec $\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{z}$

$$\dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi} \times \hat{\rho} = \dot{\phi} \hat{z} \times \hat{\rho} = \dot{\phi} \hat{\phi} \quad (5.6)$$

- **Dérivée temporelle** : moment cinétique (5.6) dans (13.64)

$$\dot{L}_C = - \left(I_{C,3} + \frac{\rho}{R} I_{C,2} \sin \theta \right) \frac{\rho}{R} \dot{\phi} \cos \theta \hat{\phi} \quad (13.70)$$

- **Théorème de Huygens-Steiner** : cylindre : plein $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ creux

(même axe)

$$I_{C,3} = \quad (13.71)$$

C'est le moment d'inertie de la roue par rapport à un axe qui parallèle à l'axe principal d'inertie, mais qui passe par le point de contact de la roue à quel sol ? D'accord, c'est celui-ci qu'on veut. Ça va être quoi ? C'est IG_3 , plus, l'après Eugenstein, le produit de la masse d'arrous. Il faut le carré de la distance, qu'il est séparé, qui est évidemment le rayon.

notes

résumé

120m 24s



- Dérivée temporelle : moment cinétique (13.71) dans (13.70)

$$(13.72)$$

- Approximation : $R \ll \rho$ ainsi $R/\rho \ll 1$

$$(13.73)$$

- Moment de force extérieure unique : dû au poids évalué en C

$$M_C^{\text{ext}} = -MRg \sin \theta \hat{\phi} \quad (13.65)$$

- Théorème du moment cinétique : évalué en C (12.31)

$$(13.74)$$

- Théorème du moment cinétique : (13.73) et (13.65) dans (13.74)

$$(13.75)$$

Donc, c'est IG3 plus MR4. Et on vient de dire que IG3, c'est lambda MR4, plus MR4, ce qui nous donne, bien sûr, lambda plus 1 MR4. Il y a un autre moment d'inertie dont on a besoin, qu'on n'a pas calculé ensemble, mais je vais vous le donner. Si vous prenez le moment d'inertie de la roue, non pas par rapport à son axe d'assymétrie, mais par rapport à des rayons de la roue, celui-ci, c'est la moitié de l'autre. Donc, si pour l'autre, on a un lambda MR4, on aura un lambda sur 2 MR4, ce moment d'inertie, IC2, qui est d'ailleurs égal à IG2, puisqu'ils sont sur le même axe, c'est lambda sur 2 MR4. Donc, maintenant, compte tenu de ces grandeurs qu'on vient d'établir, on les substitue dans la dérivée temporelle du moment cinétique, qui prend alors la forme suivante.

notes

résumé

120m 45s



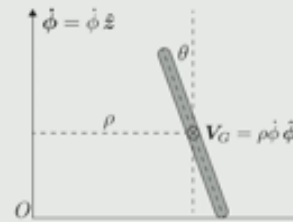
- Tangente de l'angle d'inclinaison : centre de masse G - MCU

$$\tan \theta = (\lambda + 1) \frac{\rho \dot{\phi}^2}{g} = (\lambda + 1) \frac{V_G^2}{\rho g} = (\lambda + 1) \frac{V_G^2}{g \rho} \quad (13.76)$$

où $\tan \theta$ est une fonction monotone croissante de θ .

- Angle d'inclinaison :

(13.77)



- Moto : angle d'inclinaison θ dans un virage

- Vitesse constante $V_G = \text{cste}$: si le rayon ρ diminue, l'angle d'inclinaison θ augmente et vice versa.
- Rayon constant $\rho = \text{cste}$: si la vitesse du centre de masse V_G augmente, l'angle d'inclinaison θ augmente et vice versa.



La dérivé temporelle du moment siéctique sera moins lambda plus 1, plus lambda sur 2, grand air sur roue, sinus theta, qui multiplie MR, roue, phipoincaré, cossinus, theta, foifichapo. Et là, on va faire une approximation, très raisonnable. Si vous avez une route, un vélo, qui tourne dans un virage, il est clair pour tout le monde que le rayon de courbure du virage est beaucoup plus grand que le rayon de la roue. Donc, on peut considérer que le rapport du rayon de la roue sur le rayon de courbureau est nettement à faire y'aura, ce qui veut dire que la deuxième termes entre parenthèses va être négligeable par rapport au premier. OK ? Et donc, dans cette limite, la dérivé temporelle du moment siéctique évalue au niveau du point de contact, c'est moins lambda plus 1, qui multiplie MR, roue, phipoincaré, cossinus, theta, foifichapo. Voilà donc l'expression de la dérivé temporelle du moment siéctique évalue au point de contact, qu'on va pouvoir comparer au moment de force extérieure liée au poids évalue au niveau du point de contact. D'accord ? Les MR, c'est simplifier. D'accord ? Et donc, si on applique le théorème du moment siéctique, soit que le moment de force extérieure évalue au niveau du point de contact et la dérivé temporelle du moment siéctique évalue au point de contact, on aura donc lambda plus 1, foiro, foifipoincaré, foil, cossinus de theta, qui est égal à G foilocinus de theta. Et ça, ça nous livre sur un plateau la réponse qu'on veut. Nous, c'est l'angtheta qui nous intéresse, on peut sortir de cette équation en divisant par le cossinus de theta qui est non nul, d'accord ? Puisque l'angne n'est pas un angle de 90 degrés, la tangente de theta. Cette tangente de l'angtheta, c'est lambda plus 1, qui multiplie rofipoincaré, divisé par G, soit lambda plus 1, qui multiplie le carré de la vitesse du

notes

résumé

121m 48s



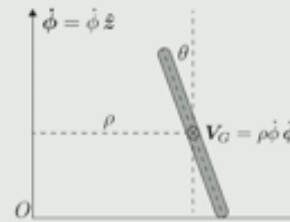
- Tangente de l'angle d'inclinaison : centre de masse G - MCU

$$\tan \theta = (\lambda + 1) \frac{\rho \dot{\phi}^2}{g} = (\lambda + 1) \frac{V_G^2}{\rho g} = (\lambda + 1) \frac{\|\vec{A}_G\|}{g} \quad (13.76)$$

où $\tan \theta$ est une fonction monotone croissante de θ .

- Angle d'inclinaison :

(13.77)



- Moto : angle d'inclinaison θ dans un virage

- ④ **Vitesse constante** $V_G = \text{cte}$: si le rayon ρ diminue, l'angle d'inclinaison θ augmente et vice versa.
- ④ **Rayon constant** $\rho = \text{cte}$: si la vitesse du centre de masse V_G augmente, l'angle d'inclinaison θ augmente et vice versa.



sang de masse, qui est rofipoincaré, divisé par Roger, ou encore, et ça, ça sera parlant, lambda plus 1, rofipoincaré, c'est l'accélération du sang de masse, donc c'est la norme de l'accélération du sang de masse divisé

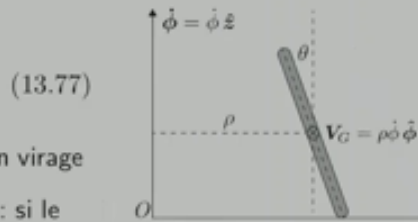
notes

résumé

n : centre de masse G - MCU

$$(13.76) \quad \frac{V_G^2}{\rho g} = (\lambda + 1) \frac{\|\vec{A}_G\|}{g}$$

de croissante de θ .



un virage

si le
inclinasion θ



avec un axe fixe et gyroscopes

41 / 49

13.3.3 Toupie

- **Toupie** : de masse M dont la position est fixée en O est fixe. Soit $\ell = \|O\vec{G}\|$ la distance entre la pointe O et le centre de masse G .
- **Objectif** : on cherche à déterminer la dynamique en rotation de la toupie autour de O .
- **Repère d'inertie** : $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ où $\hat{e}_3$ est horizontal en tout temps.
- **Cinématique** :
- **Vitesse angulaire** : précession $\dot{\phi}$

Dr. Sylvain Brichet

13 Solide indéformable

par l'accélération du champ gravitationnel. Rappelez-vous, lorsqu'on a considéré un pendule dans un train pour un mouvement de rotation, d'accord, le long d'une voie ferrée horizontale, qu'est-ce qu'on a trouvé ? L'angle d'inclinaison du pendule, la tangente de cet angle, c'était le rapport de l'accélération du sang de masse qui était une accélération sans tripette divisé par G . D'accord ? On a la même structure, sauf qu'on a un solide indéformable, ce qui se traduit maintenant par un λ différent de zéro. Si λ est égal à zéro, on retrouve le cas d'un point matériel, d'accord ? Donc c'est une expression mathématique qui est tout à fait raisonnable. Alors, l'angle d'inclinaison, maintenant, θ , c'est l'arc tangente de $\lambda + 1$ fois la vitesse du sang de masse au carré divisé par g , ce qui va nous permettre de comprendre le comportement d'un vélo ou d'une moto dans un virage. Lorsqu'une moto de grand prix arrive dans un virage, avant qu'elle rentre dans le virage, la moto est verticale, d'accord ? L'angle d'inclinaison est nul. Pourquoi ? Parce que si la trajectoire est rectiligne, le rayon de courbure est infini. Ensuite, lorsqu'elle amorce le virage, le rayon de courbure devient fini, il devient de plus en plus petit, d'accord ? Donc, vous avez une grandeur qui est plus infinie au déviateur, une grandeur qui devient de plus en plus petite, ce qui veut forcément dire que si la vitesse est constante, l'angle d'inclinaison, qui est une fonction monotone de l'argument de l'arc tangente, d'accord, va alors croître à fur et à mesure que la moto rentre dans le virage. D'accord ? Donc si elle tourne vers la droite, elle va s'incliner progressivement. Quand elle sort du virage, c'est le contraire, le rayon de courbure augmente de plus en plus, la moto remonte, et lorsqu'elle est de nouveau sur une ligne droite, elle est de nouveau verticale, d'accord ? C'est pareil pour

notes

résumé

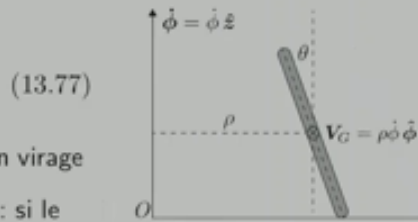
124m 25s



n : centre de masse G - MCU

$$(13.76) \quad \frac{V_G^2}{\rho g} = (\lambda + 1) \frac{\|\vec{A}_G\|}{g}$$

de croissante de θ .



un virage

si le
l'inclinaison θ



e avec un axe fixe et gyroscopes

41 / 49

13.3.3 Toupie

- **Toupie** : de masse M dont la position est fixée en O est fixe. Soit $\ell = \|O\vec{G}\|$ la distance entre la pointe O et le centre de masse G .
- **Objectif** : on cherche à déterminer la dynamique en rotation de la toupie autour de O .
- **Repère d'inertie** : $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ où $\hat{e}_3$ est horizontal en tout temps.
- **Cinématique** :
- **Vitesse angulaire** : précession $\dot{\phi}$

Dr. Sylvain Brichet

13 Solide indéformable

un vélo, sauf que la vitesse est moins importante. Donc l'angle d'inclinaison est un peu plus faible. Si vous avez maintenant une moto de grand prix qui est sur un circuit circulaire et que sa vitesse augmente de manière... Oui, sa vitesse augmente, disons, alors que le rayon reste constant, il est clair que l'angle d'inclinaison, lui, va augmenter également. D'accord ? Et quand elle ralentit, elle remonte automatiquement. D'accord ? Donc on comprend maintenant dynamiquement pourquoi un vélo a un certain angle d'inclinaison lorsqu'il s'engage dans un virage. D'accord ? Voyez tout de suite que si V_G est nul, eh bien, un θ sera nul. D'accord ? Donc si vous rentrez dans un virage et que vous poussez très gentiment votre vélo, d'accord, qui est à l'arrêt, quasiment, évidemment qu'il faudra qu'il reste vertical. En revanche, plus il va vite, plus il va commencer à s'incliner. C'est ce qu'on vient de trouver ensemble. Alors, dans le temps qu'il nous reste,

notes

résumé

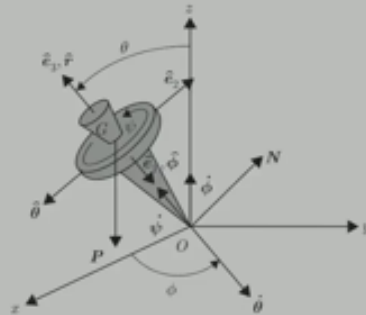
mique :

ème du moment cinétique :

$$(13.79)$$

al moment de force non-nul M_O^{ext}
au poids $P = Mg$.

ent de force extérieure : poids



$$(13.80)$$

ent d'inertie :

$$(13.81)$$

ent cinétique :

$$(13.82)$$

• Vites

$$\Omega =$$

• Mom

• Mom

• Dériv

on n'a pas le temps de traiter la toupille dans le détail, d'accord ? Vous pouvez regarder les équations. Ce qui change pour une toupille par rapport au vélo, c'est que maintenant, on a une vitesse angulaire de nutation de la toupille qui peut s'incliner. D'accord ? Et ce qu'on remarque avec une toupille, lorsqu'on considère que la nutation est faible par rapport aux autres mouvements de rotation, si on prend un angle Θ à peu près constant, on voit alors que la vitesse angulaire de rotation propre est beaucoup plus grande que la vitesse angulaire de précession et on arrive à montrer que l'une est l'inverse de l'autre alors que les équations du mouvement

notes

résumé

127m 17s



- Dérivée temporelle : moment cinétique

$$\begin{aligned}\dot{L}_O &= I_{O,\perp} \ddot{\theta} \hat{\phi} - I_{O,\perp} (\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\theta} \\ &\quad + I_{O,\parallel} (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta) \hat{r} \\ &\quad + I_{O,\perp} \dot{\theta} \dot{\phi} - I_{O,\perp} \dot{\phi} \sin \theta \dot{\theta} + I_{O,\parallel} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{r}\end{aligned}\quad (13.85)$$

- Formules de Poisson : repère sphérique (5.16)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta} \hat{r} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{\phi} \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi} (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta})\end{aligned}$$

- Dérivée temporelle : moment cinétique

(13.86)

sont plutôt compliquées.

notes

résumé

127m 49s





- Un anagyre est un ellipsoïde coupé selon un plan qui ne contient pas deux axes de symétrie.
- ① Si la précession (lacet) a lieu dans le bon sens, l'axe de rotation est un axe principal d'inertie.
- ② Si la précession a lieu dans le mauvais sens, l'axe de rotation n'est pas un axe principal d'inertie ce qui donne lieu à un couplage dynamique avec la nutation (tangage) et la rotation propre (roulis) généré par le moment de forces extérieures résultant (analogue à la roue mal équilibrée). Le couplage augmente au cours du temps et finit par arrêter le mouvement de précession de l'anagyre et à le relancer dans le sens opposé ...

Dr. Sylvain Bréchet

13 Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes

49 / 49

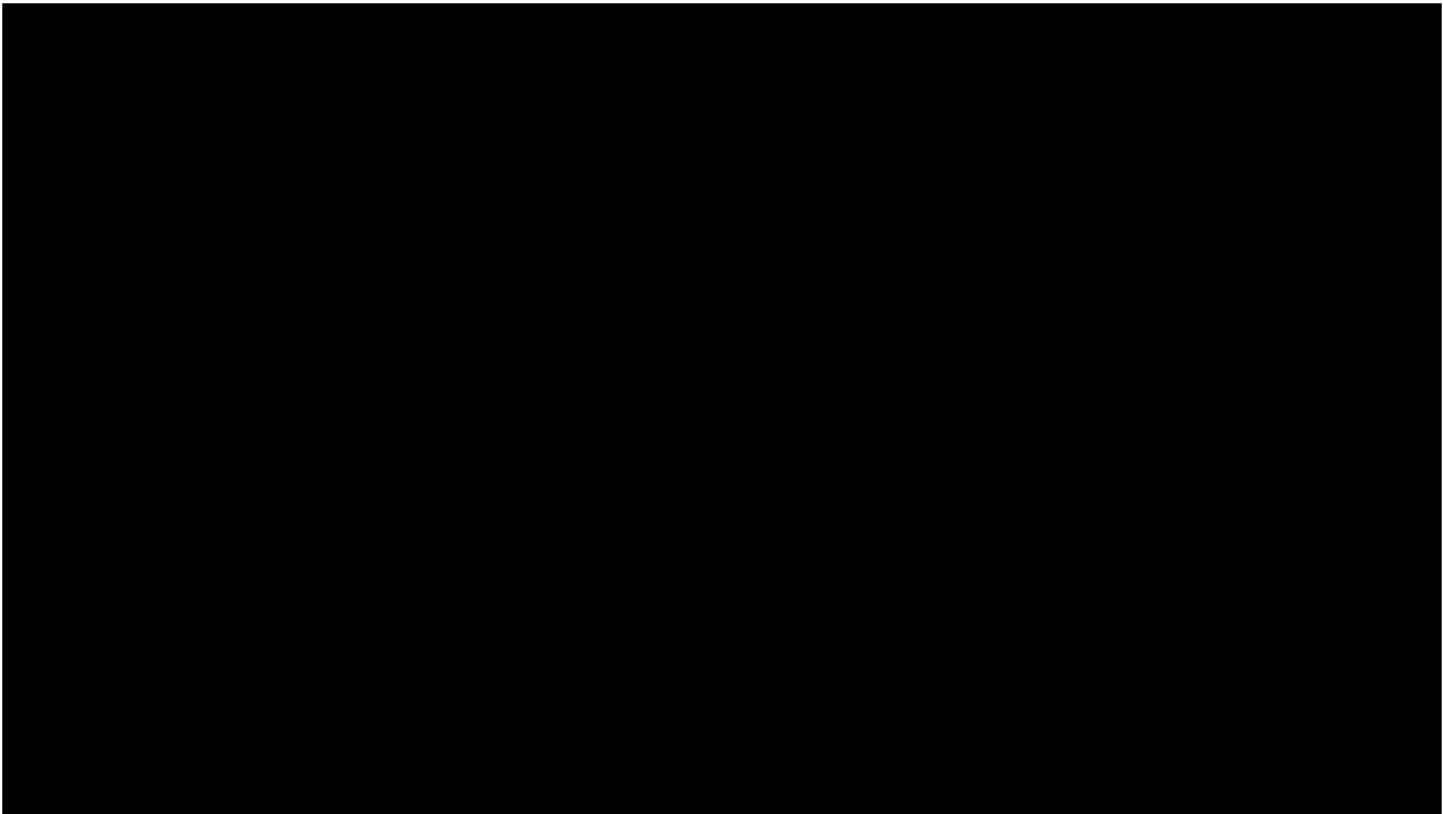
Regardez plutôt. Les voici. D'accord ? Tout est lié à tout. OK ? C'est à peu près la même idée que la route vélo. C'est encore un peu plus compliqué, mais on arrive donc à ce cas particulier où les vitesses angulaires de rotation et de rotation propres de précession sont l'inverse l'une de l'autre.

notes

résumé

127m 50s





J'aimerais terminer ce cours, la partie théorique de ce cours dédié à la mécanique classique, par une expérience absolument fascinante. Vous l'avez peut-être vu ? Peut-être pas ? Ça vaut la peine de la voir. Toujours encore sur la caméra 17, on va enlever tout le reste. Voilà. Et on va prendre... quelque chose qui est fait en bois, toucher l'eux. En Théâtre, c'est du bois, il n'y a pas de trucage. Il n'y a rien dedans. C'est un morceau de bois. C'est un ellipsoïde qui est quasiment symétrique, mais pas tout à fait. Alors, maintenant, si je le pose sur la table, que je le fais tourner, visons, vu l'avion dans le sens trigonométrique, que va-t-il se passer ? On a un mouvement de précession, donc dans l'engagement de l'aérottonétique, on a des lacets. D'accord ? Tout va bien. À votre avis, est-ce qu'on a le même comportement quand on le tourne dans l'autre sens ? Évidemment pas. D'accord ? Regardez plus tôt. On l'a refait. Je le relance dans le sens des guillemontres. Le mouvement de précession, les lacets, se couple à un tangage, il y a une mutation, une rotation propre, et il y a de nouveau un lacet en sens opposé. Donc, dans ce sens, tout va bien. Dans le sens opposé, c'est plus compliqué. Pourquoi ? Alors, peut-être que tout ce que je vous ai enseigné est faux. Auquel cas, il n'y a pas d'examen. D'accord ? Et vous passez, Noël, tranquille. Malheureusement, j'ai une mauvaise nouvelle. Ce que je vous ai enseigné est correct. Il y a quelque chose de plus subtil qui se cache derrière. Alors que se passe-t-il ? Et pourquoi ? Ça fonctionne dans un sens, mais pas dans l'autre. Quand on fait tourner la nagir, qui, dans son étymologie même, suggère que la rotation n'est pas symétrique, à nagir. D'accord ? Quand on le fait tourner dans le sens trigonométrique,

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

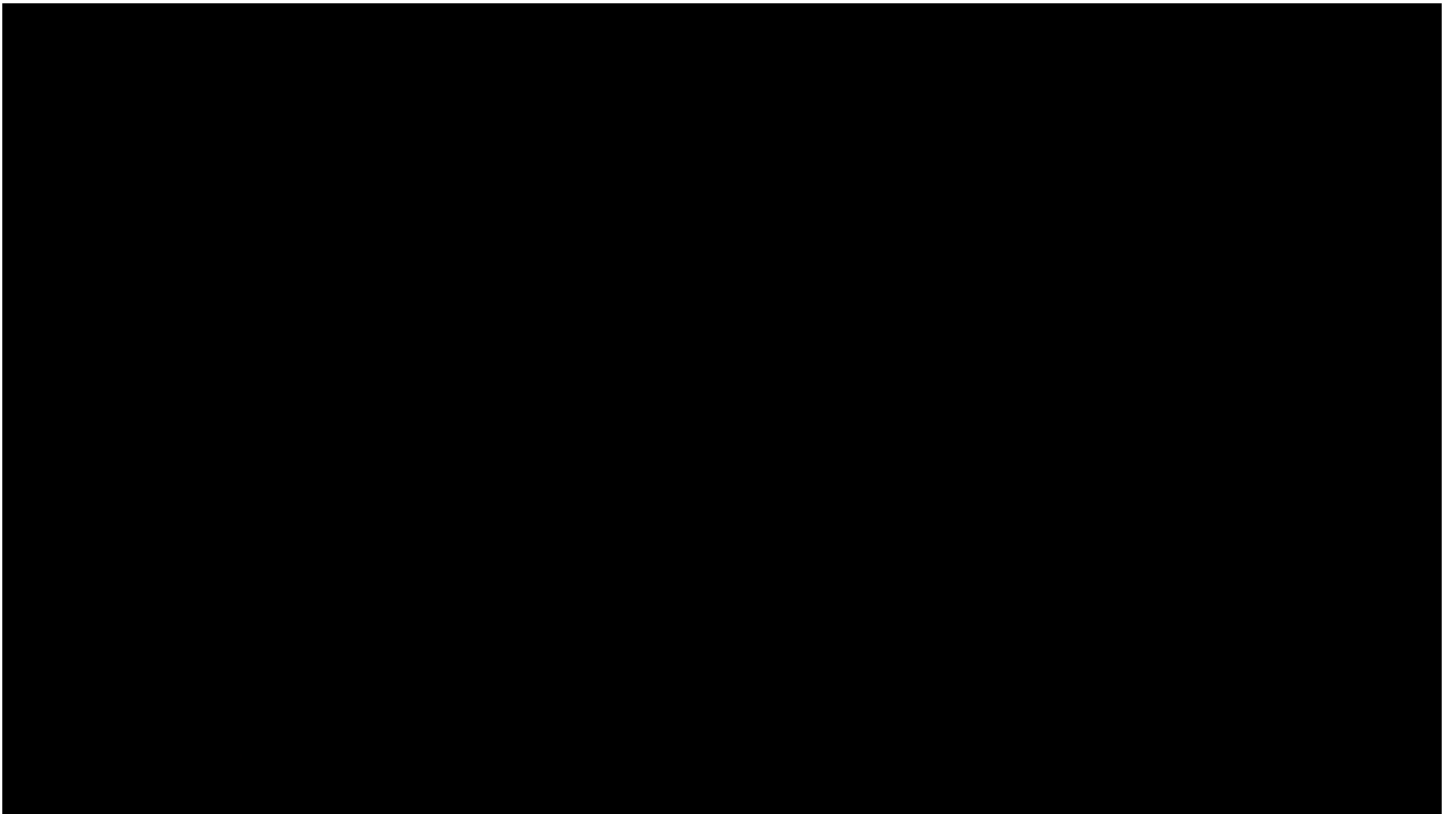
.....

.....

résumé

128m 12s





il se trouve que la rotation se fait autour d'un axe, qui est un axe principal d'inertie. Il y a donc une équation de l'air sur trois, qui est non nul, et les choses se décrivent très simplement comme ceci. En revanche, lorsqu'on fait tourner la nagir dans l'autre sens, l'axe de rotation n'est plus un axe principal d'inertie. Il y a donc un complage dynamique qui se fait à travers les trois équations de l'air, qui va rendre le mouvement de précession instable, qui va se traduire par un tangage, une utation, suivie d'une petite rotation propre, qui sont elles-mêmes instables, et on revient sur une précession dans l'autre sens. Ça ne viole pas les lois de la dynamique, mais c'est quand même assez épatant. Voilà, je vous laisserai réfléchir sur cette expérience étonnante. Je vous souhaite un très bon appétit et on se retrouve cet après-midi, à 13h15 pour les dernières applications de cours. Je ne vais pas pouvoir vous répondre maintenant.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....